Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{c} (m-1)x-y+3z=1\\ mx+my-z=m\\ x+7y-11z=m-1 \end{array}\right.$$

y resuélvelo para $m=2$ y $m=0$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m-1 & -1 & 3 & 1\\ m & m & -1 & m\\ 1 & 7 & -11 & m-1 \end{array}\right), \quad |A|=-11m^2+25m-6=0 \Longrightarrow m=2,\ m=3/11$$

Si $m\neq 2$ y $m\neq 3/11 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m=3/11$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -7/11 & -1 & 3 & 1\\ 3/11 & 3/11 & -1 & 3/11\\ 1 & 7 & -11 & -7/11 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=2$ y como $\left|\begin{array}{rrr} -7/11 & 3 & 1\\ 3/11 & -1 & 3/11\\ 1 & -11 & -7/11 \end{array}\right|=-360/121\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 7 & -11 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=2$ y como:

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 7 & -11 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 7 & 1 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -11 & 1 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrr} -1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 7 & -11 & 1 \end{array}\right|=0$$

Tenemos Rango($\overline{A}$) $= 2 =$ Rango(A) $<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

3.
   - Si $m = 2$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - (5/4)\lambda \\ y = (7/4)\lambda \end{array}\right.$$

   - Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x - y + 3z = 1 \\ -z = 0 \\ x + 7y - 11z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$. Calcular los siguientes determinantes:

1. $|2A|$
2. $|A^{-1}|$
3. $|A \cdot A^t|$ (A^t es traspuesta de A)
4. Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas.
5. Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

(Extremadura (junio 2009))

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

1. $|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2^3|A| = 16$
2. $|A^{-1} \cdot A| = |A^{-1}| \cdot |A| = |I| \Longrightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{2}$
3. $|A| = |A^t| \Longrightarrow |A \cdot A^t| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 4$
4. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

5. $\begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = |A| = 2$

Problema 3 (2 puntos). Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 Y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

(Andalucía (junio 2009))

Solución:

Sean: x el nº de cajas del 1º mercado, y el nº de cajas del 2º mercado y z el nº de cajas del 3º mercado.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40500 \\ x=450 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=450 \\ y=750 \\ z=300 \end{array} \right.$$