Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 2 & 2 \\ 2 & m & -m & 3 \\ m & -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m & -m \\ m & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \\ m & -4 & 3 \end{vmatrix} = m^2 + 9m - 10 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & -m & 3 \\ m & 7 & 3 \end{vmatrix} = -m^2 - 15m + 16 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -16$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ m & -m & 3 \\ -4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3m - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Problema 2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}
2. Calcula A^{2013} y su inversa.

Solución:

1.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$
$$A^2 = 2I \Longrightarrow A \cdot A = 2I \Longrightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2}A\right) = I \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A$$
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. $A^{2013} = A^{2012} \cdot A = \left(A^2\right)^{1006} \cdot A = (2I)^{1006} \cdot A = 2^{1006}A$
$$\left(A^{2013}\right)^{-1} = \left(2^{1006}A\right)^{-1} = \frac{A^{-1}}{2^{1006}} = \frac{\frac{1}{2}A}{2^{1006}} = \frac{A}{2^{1007}}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema
$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:
$$\begin{cases} X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 11/3 & 5/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} -2/3 & 4/3 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ c & 3c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+3c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+3d = 3a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \Longrightarrow c = 0 \\ d = 3c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.