**Problema 1** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $A^n$, para cualquier $n \in N$. Aplicar la fórmula obtenida para calcular $A^{1001}$ y $A^{1003}$.

**Solución:**

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1001 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1003} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1003 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** Resolver la ecuación matricial $AX - B = CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX - B = CX \Longrightarrow (A - C)X = B \Longrightarrow X = (A - C)^{-1}B$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-C)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** Calcular los valores de $x$ para los que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_4 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_4 - \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3 \Longrightarrow x = 1, \ x = -3$$

**Problema 4** Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a & -1 & a & 2 \\ 3 & -a & 1 & a+1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de $A$ para los diferentes valores de $a$.

**Solución:**

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & a \\ 3 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & 2 \\ 3 & -a & a+1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(a^2+a-2) = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -2$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3a & a & 2 \\ 3 & 1 & a+1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9a^2 - a + 10 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 1, \;\; a = -\frac{10}{9}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ -a & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3a^2 + a - 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 1, \;\; a = -\frac{4}{3}$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $a = 1$, luego si $a \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Y si $a = 1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.