Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n, para cualquier $n \in N$. Aplicar la fórmula obtenida para calcular A^{1000} y A^{1003}.

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{100} = \begin{pmatrix} 2^{999} & 0 & 2^{999} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{999} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{1003} = \begin{pmatrix} 2^{1002} & 0 & 2^{1002} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{1002} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - X = B - C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - X = B - C \Longrightarrow (A - I)X = B - C \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}(B - C)$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B - C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a^2 & a-b & b^2 \\ a & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a-b & b^2 \\ a & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 - \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a-b-a^2 & b^2-a^2 \\ a & b-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(b^2-a^2)\begin{vmatrix} a & b-a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(b-a)^2(a+b)$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -m & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} m & -m & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 3 \end{vmatrix} = -m^2+3m-2 = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = 2$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = m^2-4m+3 = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = 3$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & m+2 \end{vmatrix} = -m^2+2m-1 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m-1 & 3 & m+2 \end{vmatrix} = -m^2+5m-4 = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = 4$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $m = 1$, luego si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Y si $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.