Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -m & 3 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ m & 5 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & m & 0 \\ m & 5 & -9 \end{vmatrix} = -6(2m^2 + 3m - 5) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -\frac{5}{2}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 0 & m \\ m & -9 & 2 \end{vmatrix} = 12(m^2 - 1) = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = -1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -m & 0 \\ 2 & m & m \\ m & 5 & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - 3m^2 + 4m = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = 0, \;\; m = -4$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -m & 3 & 0 \\ m & 0 & m \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 9m(m + 1) \Longrightarrow m = 1, \; m = 0$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que en estos casos el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

Problema 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular $A^{1000} - A^{900}$

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} - A^{900} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1000 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 900 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 2/3 & -5/3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Problema 4 calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a - b \\ c & c - d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a + c = a \Longrightarrow c = 0 \\ -c = c \Longrightarrow c = 0 \\ c - d = -d \Longrightarrow c = 0 \\ b + d = a - b \Longrightarrow a = 2b + d \end{array} \right.$$

LLamamos $X = \begin{pmatrix} 2b + d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$