Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & -m & 2 \\ m & 3 & 1 & m \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & m & -m \\ m & 3 & 1 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -4(m^2 - 5m + 4) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & m & 2 \\ m & 3 & m \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 2 \\ m & 1 & m \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} m & -m & 2 \\ 3 & 1 & m \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -4(m^2 - 5m + 4) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 4$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Cuando $m = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Cuando $m = 4 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$.

Problema 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{101}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ I & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

$$A^{101} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 7/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 13/4 & 5/4 \\ 5/4 & -3/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2b & b \\ -c + 2d & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = -a + 2b \Longrightarrow b = 0 \\ -b = b \Longrightarrow b = b \\ 2a + c = -c + 2d \Longrightarrow a = c - d \\ 2b + d = d \Longrightarrow b = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d - c & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.