Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x+ & my- & z= & m+2 \\ x- & y- & 5z= & -6 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m
2. Resuelve el sistema para $m=0$ y para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & m & -1 & m+2 \\ 1 & -1 & -5 & -6 \end{array}\right);\quad |A|=-6m+6=0\Longrightarrow m=1$$

   - Si $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $m=1$:

     $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & -6 \end{array}\right);\quad |A|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

     $$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$$

     Como Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $<$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

2. Si $m=1$:

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x+ & y- & z= & 3 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=5-3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

   Si $m=0$:

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x- & & z= & 2 \\ x- & y- & 5z= & -6 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=5/3 \\ y=1 \\ z=4/3 \end{array}\right.$$

Problema 2 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a+b \\ c & -2c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a-2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b-2d = -2a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \Longrightarrow c = 0 \\ d = -2c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Problema 3 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ -1 & 3 & m \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ -1 & 3 & m \\ 8 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3m^2 + 23m - 58 = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = -29/3$$

Si $m = 2$ o $m = -29/3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 2$ y $m \neq -29/3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -15/58 & 7/29 & 9/58 \\ -5/58 & 12/29 & 3/58 \\ 21/58 & -4/29 & -1/58 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos). Una empresa de elaboración de alimentos para ganado vacuno tiene tres tipos de pienso, A, B y C. El pienso A lo vende a 2 euros el kg, el B a 3 euros el kg y el C a 8 euros el kg. Un ganadero quiere comprar 1500 kg a un coste de 4 euros el kg, con la condición de que la cantidad de pienso B tiene que ser el doble del de C. Calcular la cantidad que hay que mezclar de cada tipo de pienso.

Solución:

Sean: x el n$^{\text{o}}$ de kg de A, y el n$^{\text{o}}$ de kg de B y z el n$^{\text{o}}$ de kg de C.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1500 \\ 2x+3y+8z=6000 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=375 \\ y=750 \\ z=375 \end{array}\right.$$