Problema 1 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & 7z= & 4a-1 \\ x+ & (1+a)y- & (a+6)z= & 3a+1 \\ & ay- & 6z= & 3a-2 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
2. Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.
3. Resuélvase el sistema en el caso a = -3.

(Madrid Junio 2012) **Solución:**

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right); \ |A| = a^2-a-6=0 \Longrightarrow a=3, \ a=-2$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a = 3$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  $$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)
- Si $a = -2$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

2.
$$\left\{\begin{array}{l} x-y-4z=-5 \\ 2y-6z=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

3. $a=-3$
$$\left\{\begin{array}{l} x-3y-7z=-13 \\ x-2y-3z=-8 \\ -3y-6z=-11 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4/3 \\ y=7/3 \\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Problema 2 Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{array}\right);\quad C=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right)$$

1. Calcula matriz inversa de C.
2. Obtén la matriz X que verifica $AX+B^t=C$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

1.
$$C^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

2.
$$AX+B^t=C \Longrightarrow X=A^{-1}(C-B^t)=\left(\begin{array}{rr} 6 & 6 \\ 2 & 3/2 \end{array}\right)$$
$$A^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{array}\right),\quad C-B^t=\left(\begin{array}{rr} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}\right)$$

Problema 3 Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$:

1. Hallar la matriz inversa de $A-I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
2. Hallar la matriz B tal que $A+B=AB$.

(País Vasco Junio 2011)

Solución:

1.
$$(A-I)^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$$

2.
$$A + B = AB \Longrightarrow B = (A - I)^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Un comerciante vende tres tipos de relojes, A, B y C. Los del tipo A los vende a 200 euros; los del tipo B, a 500 euros, y los del tipo C, a 250 euros. En un mes determinado vendió 200 relojes en total. Si la cantidad de los que vendió ese mes de tipo B fué igual a los que vendió de tipo A y tipo C conjuntamente, calcula cuántos vendió de cada tipo si la recaudación de ese mes fué de 73500 euros.

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

Sea x nº de relojes tipo A, y nº de relojes tipo B y z nº de relojes tipo C.
$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 200 \\ 200x + 500y + 250z = 73500 \\ y = x + z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ y = 100 \\ z = 70 \end{array} \right.$$