Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & az = & 2 \\ ax+ & y- & z = & 2a \\ 3x- & y- & z = & a \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a.

2. Resolver el sistema para el caso en el que $a = 1$, siempre que sea posible.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -a & 2 \\ a & 1 & -1 & 2a \\ 3 & -1 & -1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = 2a^2 - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -1$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como la primera y la segunda fila son iguales podemos concluir con que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$Sistema compatible indeterminado.

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{array}\right| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como la segunda fila es igual que la primera, pero multiplicada por -1 podemos concluir con que el Rango$(\overline{A}) = 2$. Es decir, Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 2 \\ 3x- & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y= & 2+z \\ 3x- & y= & 1+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\lambda \\ y=-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver, si es posible, la ecuación matricial

$$AX = BC + I_2 \quad \text{donde } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX = BC + I_2 \Longrightarrow X = A^{-1}(BC + I_2)$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC + I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BC + I_2) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 12. Si a este número le restamos este mismo número pero leido al revés obtenemos -99. Calcular el número en cuestión sabiendo que dígito de las decenas es un a unidad mayor que el dígito de las unidades.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 100x+10y+z-(x+10y+100z)=-99 \\ y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z= & 12 \\ -x & & z= & 1 \\ & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 3 \\ y= & 5 \\ z= & 4 \end{array}\right.$$

El número es 354.