Problema 1 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx- & y & = & m \\ x+ & 2y- & mz = & -1 \\ 2x+ & y- & mz = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & -1 & 0 & m \\ 1 & 2 & -m & -1 \\ 2 & 1 & -m & 0 \end{array}\right), \quad |A| = m - m^2 = 0 \quad m = 0, \ m = 1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible (No tiene Solución).

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Como La tercera fila $F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$.

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & = & 1 \\ x+ & 2y- & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Tres constructoras invierten en la compra de terrenos de la siguiente forma: la primera invirtió medio millón de euros en terreno urbano, 250.000 euros en terreno industrial y 250.000 euros en terreno rústico. La segunda invirtió 125.000, 250.000 y 125.000 euros en terreno urbano, industrial y rústico, respectivamente, y la tercera, 100.000, 100.000 y 200.000 euros en estos mismos tipos de terreno, respectivamente. Transcurrido un año venden todos los terrenos. La rentabilidad que obtiene la primera constructora es del 13,75 %, la de la segunda del 11,25 % y, finalmente, la de la tercera es del 10 %. Determina la rentabilidad de cada uno de los tipos de terreno por separado.

Comunidad Valenciana (Junio 2006)

Solución:

x rentabilidad del terreno urbano.
y rentabilidad del terreno industrial.
z rentabilidad del terreno rústico.

$$\left\{\begin{array}{l} 500000x + 250000y + 250000z = 1000000 \cdot 0,1375 \\ 125000x + 250000y + 125000z = 500000 \cdot 0,1125 \\ 100000x + 100000y + 200000z = 400000 \cdot 0,1125 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 18,75 \\ y = 8,75 \\ z = 8,75 \end{array}\right.$$

Problema 3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halle el producto A por B

b) Calcule la matriz inversa del producto A por B.

c) Halle el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre esta matriz y la del apartado anterior? Justifique la respuesta.

Cantabria (Junio 2006)

Solución:

a)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$|A \cdot B| = -1, \;\; (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

c)
$$|B| = 1, \;\; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; |A| = 1, \;\; A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$