Problema 1 Con 450 grm de un medicamento se fabricaron 60 pastillas de tres tipos: grandes, medianas y pequeñas. Las pastillas grandes pesan 20 grm, las medianas 10 grm y las pequeñas 5 grm. Si el total de pastillas grandes y medianas es la mitad de las pastillas pequeñas ¿cuántas se fabricaron de cada tipo?

Solución:

x nº de pastillas grandes.
y nº de pastillas medianas.
z nº de pastillas pequeñas.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ 20x+10y+5z=450 \\ x+y=\frac{z}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 60 \\ 20x+ & 10y+ & 5z= & 450 \\ 2x+ & 2y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=15 \\ z=40 \end{array}\right.$$

Problema 2 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx- & y & +mz= & 0 \\ x+ & y & = & m \\ x- & 5y & +3z= & -2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} m & -1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=3-3m=0 \Longrightarrow m=1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ $=$ 3 $=$Rango$(\overline{A})$ $=$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$.

Luego $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y & -z = & 0 \\ x+ & y & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 Encontrar todas las matrices X no nulas que verifican $X \cdot A = A \cdot X$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 2b \\ c + d & 2d \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a + b \quad b = 0 \\ b = 2b \quad b = 0 \\ a + 2c = c + d \quad a = d - c \\ b + 2d = 2d \quad b = 0 \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} d - c & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$