Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2ay+ & z = & a \\ ax- & 6y+ & (a-2)z = & 3 \\ 2x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a.

2. Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2a & 1 & a \\ a & -6 & a-2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = -2a^2 + 6a = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 3$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{array}\right| = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right| = -27 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$Sistema incompatible.

Si $a = 3$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -6 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 3 & -6 \\ 2 & 1 \end{array}\right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como tiene dos filas iguales podemos concluir con que el Rango$(\overline{A}) = 2$. Es decir, Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 6y+ & z= & 3 \\ 2x+ & y+ & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 3x- & 6y= & 3-z \\ 2x+ & y= & 1-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{9}{15}-\frac{7}{15}\lambda \\ y=-\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - I = BC - BX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - I = BC - BX \Longrightarrow (A+B)X = BC + I \Longrightarrow X = (A+B)^{-1}(BC+I)$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BC + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/17 & 2/17 \\ -1/17 & 5/17 \end{pmatrix}$$

$$X = X = (A+B)^{-1}(BC+I) = \begin{pmatrix} 3/17 & 2/17 \\ -1/17 & 5/17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/17 & 20/17 \\ -1/17 & -1/17 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Un bodegero tiene tres tipos de vino A, B y C, el primero lo vende a 3 euros el litro, el segundo a 5 y el tercero a 10. Le hacen un pedido de 2000 litros, y el cliente quiere pagarlo a 6 euros el litro, le da igual las combinaciones que quiera hacer el bodegero siempre que la cantidad que ponga del vino A sea un tercio de lo que ponga de la otras dos juntas. Se pide calcular la cantidad de litros que debe mezclar el bodegero.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2000 \\ 3x+5y+10z=12000 \\ x=\frac{1}{3}(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 2000 \\ 3x+ & 5y+ & 10z= & 12000 \\ 3x- & y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & 500 \\ y= & 900 \\ z= & 600 \end{array}\right.$$