Problema 1 Una aseguradora tiene tres tarifas: una para adultos, otra para niños y otra para ancianos. Se sabe que una familia de 3 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 215 euros, una segunda familia de 4 adultos, 1 niño y 2 ancianos paga 260 euros, una tercera familia de 2 adultos, 2 niños y 1 anciano paga 190 euros.

1. ¿Cuánto paga cada niño, adulto y anciano?
2. ¿Cuánto pagará una familia de 5 adultos, 3 niños y 2 ancianos?

(Islas Canarias (Junio 2006))

Solución

1. Sea x tarifa de adulto, y tarifa de niño y z tarifa de anciano.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+z=215 \\ 4x+y+2z=260 \\ 2x+2y+z=190 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=25 \\ y=40 \\ z=60 \end{array}\right.$$

2. $5x+3y+2z=125+120+120=365$ euros.

Problema 2 Resolver:

1. Discute el sistema siguiente según los valores del parámetro a

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & (a+1)y= & 1 \\ ax+ & 2y= & -2 \end{array}\right.$$

2. Resuélvelo para el valor de a que lo hagan indeterminado.

(Barcelona (Junio 2006))

Solución

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right), \quad |A|=-a^2-a+2=0 \Longrightarrow a=1, \ \ a=-2$$

Si $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \; |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{array} \right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Si $a = -2$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \; F_2 = -2F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 1 = \text{Rango}(A) <$

N$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

2. Si $a = -2 \Longrightarrow x - y = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$

Problema 3 Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right)$ calcula $AA^T - 5A^{-1}$, siendo A^T y A^{-1} las matrices transpuesta e inversa, respectivamente.

(Comunidad Valenciana (Junio 2006))

Solución

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{array} \right), \quad A^T = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$AA^T - 5A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array} \right) \cdot A^T = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{array} \right) - 5 \left(\begin{array}{cc} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{array} \right)$$

Problema 4 Encontrar todas las matrices X cuadradas de orden 2 que satisfacen la igualdad $AX = XA$ en cada uno de los siguientes casos:

1. $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right)$

2. $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{array} \right)$

(Madrid (Junio 2006))

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} b = 3b \Longrightarrow b = 0 \\ 3c = c \Longrightarrow c = 0 \\ a = a \Longrightarrow a \text{ cualquiera} \\ 3d = 3d \Longrightarrow d \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c = 3b \\ d = a \Longrightarrow c = 0 \\ 3a = 3d \Longrightarrow a = d \\ 3b = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$