Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 5 \\ 2x+ & 3y+ & z= & 3 \\ ax+ & 10y+ & 4z= & 2 \end{array}\right.$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro a.
2. Resolver el sistema para $a = 1$.

(Catalñuña (Junio 2008)).

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ a & 10 & 4 & 2 \end{array}\right), \quad |A| = 14 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 7$$

Si $a \neq 7 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0$$

En este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

2. Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 5 \\ 2x+ & 3y+ & z= & 3 \\ x+ & 10y+ & 4z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 2 (3 puntos). Un autobús transporta en cierto viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que vale 1 euro; estudiantes que tienen un 25 % de descuento y jubilados con un 50 % del precio del billete. La recaudación del autobús en este viaje fue de 48 euros. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de viajeros.

(Galicia (Junio 2008))

Solución:

Sea x el nº viajeros a 1 euro (normales), y el nº viajeros a 0,75 euros (estudiantes) y z el nº viajeros a 0,50 euros (jubilados).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ x+0,75y+0,5z=48 \Longrightarrow 4x+3y+2z=192 \\ y=2(x+z) \Longrightarrow 2x-y+2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=16 \\ y=40 \\ z=4 \end{array}\right.$$

Problema 3 (2 puntos). Determinar X que verifica: $AX+I=AB^T$, donde I es la matriz identidad, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B^T es la matriz transpuesta de B.

(Comunidad Valenciana (Junio 2008))

Solución:

$$AX+I=AB^T \Longrightarrow X=A^{-1}(AB^T-I)$$

$$AB^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AB^T-I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}(AB^T-I)=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$