Problema 1 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z= & a \\ ax- & 2y- & az= & 1 \\ x+ & ay+ & z= & 2 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los diferentes valores de a.
2. Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & a \\ a & -2 & -a & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A|=4a-4=0 \Longrightarrow a=1$$

Si $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado, con solución única.

Si $a=1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como tiene dos filas iguales podemos concluir con que el $\text{Rango}(\overline{A})=2$. Es decir, $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(\overline{A})=2<\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z= & 1 \\ x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y= & 1+z \\ x+ & y= & 2-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XA-C=XB-I$. Donde

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right);\ C=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

Solución:

$$XA - C = XB - I \Longrightarrow X(A-B) = C - I \Longrightarrow X = (C-I)(A-B)^{-1}$$

$$C - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (C-I)(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 En una visita a una granja apícola nos enseñaron unas instalaciones para 10.000 gallinas. En esta granja había departamentos diferentes, en unos metían gallinas para la puesta de huevos, en otros para la cría y en otros para la investigación de razas. El guía nos dijo que para que esa granja fuera rentable el número de gallinas dedicada a la puesta tenía que ser el triple de las otras dos juntas y que el número de las destinadas a la investigación tenía que ser la tercera parte que el de las destinadas a la cría. ¿Cuántas gallinas hay en cada uno de esos departamentos, sabiendo que están completos?.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 10000 \\ x = 3(y+z) \\ z = \frac{y}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 10000 \\ x- & 3y- & 3z = & 0 \\ - & y+ & 3z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 7500 \\ y = & 1875 \\ z = & 625 \end{array} \right.$$

www.yoquieroaprobar.es