

Problema 1 (6 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x - y + kz = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de k .
2. Resúlvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resúlvase el sistema para $k = 0$.

(Madrid (Junio 2010))

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies |A| = -k^2 + k + 2 = 0 \implies k = -1, k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies \begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos que : $|c_1 c_2 c_3| = |c_1 c_3 c_4| = |c_1 c_2 c_4| = |c_2 c_3 c_4| = 0$

$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{el Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 2 < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 7z = 8 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{2}{3} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

3. Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ x - y = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). En un hipermercado se realiza el recuento de caja al final de cierto día. En monedas de 10, 20 y 50 céntimos de euro, el importe total obtenido asciende a 500 euros. Por otra parte, se sabe que 200 euros corresponden, conjuntamente, a las monedas de 10 y 20 céntimos. Si en total se cuentan 1800 monedas, ¿cuántas monedas debe haber de 10, 20 y 50 céntimos para que cuadre la cuenta?
(Castilla León (Junio 2010))

Solución:

Sean x el número de monedas de 10 céntimos, y el número de monedas de 20 céntimos y z el número de monedas de 50 euros.

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 50000 \\ 10x + 20y = 20000 \\ x + y + z = 1800 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 400 \\ y = 800 \\ z = 600 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $A^T \cdot B - A \cdot B^T$

2. Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $A^T \cdot B - A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

$$2. AX + BA = B \implies X = A^{-1}(B - BA) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es