Problema 1 Se tienen 9,50 euros en monedas de 5 céntimos, de 10 céntimos y de 50 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos excede en 9 unidades el número de monedas de 50 céntimos y cada 3 monedas de 10 céntimos se tienen 4 de 5 céntimos.

(Islas Baleares (Junio 2006))

Solución

Sea x n^o monedas de 5 céntimos, y n^o monedas de 10 céntimos y z n^o monedas de 50 céntimos.

$$\left\{\begin{array}{c} 5x + 10y + 50z = 950 \\ y = z + 9 \\ 3x = 4y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 28 \\ y = 21 \\ z = 12 \end{array}\right.$$

Problema 2 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z = & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 2y+ & az = & 8 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a.
2. Resolver el sistema para $a = 4$

(Madrid (Junio 2006))

Solución

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right), \quad |A| = 8a + 14 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{7}{4}$$

Si $a \neq -7/4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $a = -7/4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -7/4 & 8 \end{array}\right) \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 46 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & 0 \\ 3x+ & 2y- & 2z = & 3 \\ 2x+ & 2y+ & 4z = & 8 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 3 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

1. Determine la matriz inversa de A.

2. Halle los valores x,y y z para los que $AX = Y$

(Andalucía (Junio 2006))

Solución

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $AX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 2 = -x \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Problema 4 Encontrar una matriz X que verifique la igualdad $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Verifica también la matriz X la igualdad $XA = B$?

(Navarra (Junio 2006))

Solución

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ya que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$XA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \neq B$$