Problema 1 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} mx & + & z = & 0 \\ -2x & +y+ & mz = & 1 \\ -x & +y+ & 2z = & m \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 2 & m \end{array}\right), \quad |A| = -m^2 + 2m - 1 = 0 \quad m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array}\right| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como la tercera fila es la suma de las dos primeras tenemos que Rango$(\overline{A}) = 2$.

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & + & z = & 0 \\ -2x & +y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 Tres amigas, Elisabet, Joana y Margalinda van a la frutería. Elisabet compra 1 kg de albaricoques y 1 kg de ciruelas; Joana compra 1kg de albaricoques y 2 kg de cerezas; y Margalinda compra 2 kg de albaricoques, 1 kg de cerezas y 2 kg de ciruelas.
Elisabet, Joana y Margalinda gastan en esta compra 2,7 euros, 7,1 euros y 8,2 euros, respectivamente. Se denotan por x, y, z las incógnitas que representan respectivamente, el precio de 1 kg de albaricoques, de 1 kg de cerezas y de 1 kg de ciruelas.

a) Dé la matriz A, que expresa el número de kg de albaricoques, de cerezas y de ciruelas que compra cada una de las tres amigas, de manera que $A \cdot X = B$, donde:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2,7 \\ 7,1 \\ 8,2 \end{pmatrix}$$

b) Calcule A^{-1}

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$

Islas Baleares (Junio 2006)

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,7 \\ 7,1 \\ 8,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,8 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar los valores x, y, z, que hacen posible la igualdad $A \cdot B = A + C$. Justificar la respuesta.

Extremadura (Junio 2006)

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3z \\ x+y-6 & 5 & 1-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x - y = 0 \\ -x + 9 = 10 \\ -1 + 3z = 2 \\ x + y - 6 = -5 \\ 1 - 2z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$