Problema 1 La distancia a tres playas (A, B y C) del lugar de veraneo de una familia es tal, que el doble de la distancia a A es el triple de la distancia a B. La suma de las distancias a A, B y C es de 90000m, y el doble de la distancia a B más el triple de la distancia a C menos la distancia a A es igual a 130000 m.

¿Cuál es la distancia a cada playa?

Solución:

x es la distancia a la playa A.
y es la distancia a la playa B.
z es la distancia a la playa C.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x = 3y \\ x + y + z = 90000 \\ 2y + 3z - x = 130000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 3y & & = & 0 \\ x+ & y & +\ z = & 90000 \\ -x+ & 2y & +3z = & 130000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30000 \\ y = 20000 \\ z = 40000 \end{array}\right.$$

Problema 2 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +my- & z = & 0 \\ x & + & z = & -m \\ x & +3y- & 5z = & 2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de m.

b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -m \\ 1 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right), \quad |A| = -6 + 6m = 0 \quad m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$.

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n^{o} de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +y- & z = & 0 \\ x & + & z = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 Resolver la ecuación matricial $CX - A \cdot B = C^t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$CX - A \cdot B = C^t \Longrightarrow X = C^{-1}(C^t + A \cdot B)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^t + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C{-}1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(C^t + A \cdot B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$