

Problema 1 Discutir el siguiente sistema en función del parámetro λ y resolverlo para $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \lambda x + 2y = \lambda \\ 2x + \lambda y + 4z = -1 \end{cases}$$

(Murcia Junio 2011)

Solución:

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & 4 & -1 \end{array} \right); |A| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

2. $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + y + 4z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Problema 2 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcule $A^2 - B \cdot C^t$.

2. Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2 \cdot C$.

(Andalucía Junio 2011)

Solución:

1. $A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot X + B = 2 \cdot C \implies X = A^{-1}(2C - B) = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$

Problema 3 Considera el sistema de ecuaciones en forma matricial $A \cdot X = 0$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Determina para qué valores de m la matriz A no tiene inversa.
2. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando $m = 0$.
3. Determina las soluciones del sistema $A \cdot X = O$ cuando $m = 0$.

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

1. $|A| = m^2 + 4m + 3 = 0 \implies m = -1$ y $m = -3$:
Si $m \neq -1$ y $m \neq -3 \implies A$ tiene inversa.
Si $m = -1$ o $m = -3 \implies A$ no tiene inversa.

2. Si $m = 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Si $m = 0$ el sistema $AX = O$ es un sistema homogéneo y $|A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 \implies$ el sistema es compatible determinado y la única solución es la trivial: $x = y = z = 0$.

Problema 4 Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

(Castilla-León Junio 2011)

Solución:

Sea x n° de participaciones de 1 euro, y n° de participaciones de 2 euro y z n° de participaciones de 5 euro.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es