Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & my+ & 2z= & 4\\ -x+ & 2y+ & mz= & 3\\ 5x- & my+ & 4z= & 6 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m
2. Resuelve el sistema para $m=0$ y para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & m & 2 & 4\\ -1 & 2 & m & 3\\ 5 & -m & 4 & 6 \end{array}\right);\quad |A|=6(m^2+m-2)=0\Longrightarrow m=-2,\ m=1$$

- Si $m\neq -2$ y $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 5 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right);\quad |A|=0,\quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ -1 & 2 \end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$$

Como $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(\overline{A})<$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

- Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4\\ -1 & 2 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right);\quad |A|=0,\quad \left|\begin{array}{rr} 1 & -2\\ 5 & 2 \end{array}\right|=12\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 4\\ -1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 6 \end{array}\right|=-84\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como $\text{Rango}(A)\neq\text{Rango}(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema incompatible y no tiene solución.

2. Si $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 4 \\ -x+ & 2y+ & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5/3 - \lambda \\ y = 7/3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & 2z = & 4 \\ -x+ & 2y & = & 3 \\ 5x+ & & 4z = & 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2/3 \\ y = 7/6 \\ z = 7/3 \end{array} \right.$$

Problema 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

1. Determina los valores de m para los que la matriz A no tiene inversa.
2. Para $m = 2$ calcular A^{-1}
3. Para $m = 2$ resolver la ecuación matricial $AX + I = B$, donde $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución:

1. $$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$
   - Si $m = -1$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe inversa.
   - Si $m \neq -1$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe inversa.
2. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$
3. $AX + I = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B - I)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}; \quad B - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B - I) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Una nación importa 21.000 vehículos mensuales de las marcas X, Y y Z, al precio de 12.000, 15.000 y 20.000 euros, respectivamente. Si el total de la importación ascendió a 332.000.000 euros y de la marca X se importa el 40 % de la suma de las otras dos marcas. Se pide calcular cuanto vehículos se importarán mensualmente de cada marca.

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

Sean: x el nº de vehículos de la marca X, y el nº de vehículos de la marca Y y z el nº de vehículos de la marca Z.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=21000 \\ 12000x+15000y+20000z=332000000 \\ x=0,4(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6000 \\ y=8000 \\ z=7000 \end{array}\right.$$