Problema 1 (5 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=2 \\ -2x+ & 3y+ & z=1 \\ -x+ & ay+ & 3z=3 \end{array}\right.$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a.
2. Resolver el sistema para $a=2$.

(Septiembre 2006 - Opción B)
Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=20-5a=0\Longrightarrow a=4$$

   Si $a\neq 4\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado

   Si $a=4\Longrightarrow |A|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{array}\right|=5\neq 0\Longrightarrow$ Rango(A)=2.

   Como las dos últimas columnas de $\overline{A}$ son iguales, el Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2. Si $a=2$:
   $$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=2 \\ -2x+ & 3y+ & z=1 \\ -x+ & 2y+ & 3z=3 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?
(Junio 2008 - Opción A)

www.yoquieroaprobar.es

Solución:
x: hectáreas de barbecho
y: hectáreas de trigo
z: hectáreas de cebada

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

1. Determínese los valores de k para los cuales A tiene inversa.
2. Para $k=2$, calcúlese (si existe) A^{-1}.
3. Para $k=1$, calcúlese $(A-2A^T)^2$.

Nota: La notificación A^T representa a la matriz transpuesta de A.
(Modelo 2009 - Opción A)
Solución:

1.

$$|A|=k^2-k \Longrightarrow k=1, \;\; k=0$$

Si $k\neq 0$ y $k\neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $k=0$ o $k=1 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

2. Si $k=2$ la inversa existe:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Si $k=1$:

$$(A-2A^T)^2=\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

www.yoquieroaprobar.es