Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} mx- & 2y- & z = & 0 \\ x+ & 3y+ & 2z = & m \\ 2x+ & y+ & mz = & m \end{array}\right.$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro m.
2. Resolver el sistema para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & m \\ 2 & 1 & m & m \end{array}\right), \quad |A| = 3m^2 - 3 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = 4 \neq 0$$

tenemos Rango$(\overline{A}) = 3$ En este caso Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A})$ y es un Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$ y además $F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Tenemos que:

Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y es un Sistema Compatible Indeterminado. (Tiene infinitas soluciones)

2. Si $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y- & z = & 0 \\ x+ & 3y+ & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 - (1/5)\lambda \\ y = 1/5 - (3/5)\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y- & z = & 0 \\ x+ & 3y+ & 2z = & 0 \\ 2x+ & y+ & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 (3 puntos). Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.
2. Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $XB - A = I$.

(Andalucía (Junio 2009))

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 12 = 3b \\ 2 = 2a \\ 3a = 3 \\ 3b = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

2. $XB - A = I \Longrightarrow X = (I + A)B^{-1}$:

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (I + A)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcular:

1. $(A + B)^2$
2. $A^2 + B^2 + 2AB$

3. ¿Son iguales los resultados de los apartados anteriores? Razona la respuesta.

(Navarra (Junio 2009))

Solución:

1.
$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

2.
$$A^2+B^2+2AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Los resultados son distintos porque $A \cdot B \neq B \cdot A$