Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$$

Si $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AB - CX = I$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$-CX = I - AB \Longrightarrow CX = AB - I \Longrightarrow X = C^{-1}(AB - I)$$

$$AB - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(AB - I) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ -5/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 - 2\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 - 3\mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \\ -6 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2 + 4\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3 + 6\mathrm{F}_1 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Concluimos con que el Rango$(A) = 2$.