

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = 0 \implies m = 1, \quad m = -\frac{1}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -1/2 \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1} .

Si $m \neq -1$ y $m \neq -1/2 \implies |A| \neq 0 \implies$ existe A^{-1} .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 1/5 & 6/5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = C \implies X = A^{-1}(C + B)$$

$$C + B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 + C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned}$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $B \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $\text{Rango}(A) < 3$, buscamos menores de orden dos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Concluimos con que el $\text{Rango}(A) = 2$.

www.yoquieroaprobar.es