Problema 1 *(5 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
2. Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resuélvase el sistema para k = 4.

(Modelo 2012 - Opción A)
Solución:

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right); \ |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

   - Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n° de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
   - Si $k = 2$:

     $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

     $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

     Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)
   - Si $k = 1$:

     $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right); \ F_1 = F_2 \ \text{y} \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

     Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n° de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

2.
$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1\\ y+2z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

3.
$$\left\{\begin{array}{r} x+4y+4z=4\\ x+y+z=4\\ 4y+2z=4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4\\ y=2\\ z=-2\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

1. Obténgase A^{2007}.

2. Hállese la matriz B tal que $A\cdot B=\begin{pmatrix} 11 & 5 & 1\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}$

(Modelo 2013 - Opción B)
Solución:

1.
$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\Longrightarrow A^n\left\{\begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar}\\ I & \text{si} & n \text{ es par}\end{array}\right. \Longrightarrow A^{2007}=A$$

2. $A\cdot B=C\Longrightarrow B=A^{-1}C$:
$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$
$$B=A^{-1}C=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 5 & 1\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1\\ 3 & a\end{pmatrix}$

1. Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

2. Para $a=2$, calcúlese la matriz $B=(A^{-1}A^T)^2$.

3. Para $a=2$, calcúlese la matriz X que satisface la ecuación matricial:
$$AX-A^2=A^T$$

Nota.- A^T representa a la matriz traspuesta de A.
(Modelo 2012 - Opción B)
Solución:

1. $$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

   Si $a = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

   Si $a \neq \pm\sqrt{3} \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$.

2. Si $a = 2$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Con $a = 2$:
$$AX - A^2 = A^T \Longrightarrow X = A^{-1}(A^T + A^2)$$
$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2\right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$