Sea la función $F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

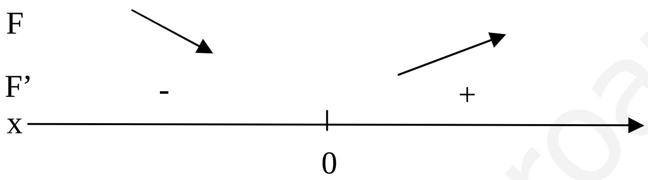
a) Calcular F'(x), estudiar el crecimiento de F(x) y hallar sus máximos y mínimos.
b) Calcular F''(x) y estudiar la concavidad y convexidad de F(x). Esbozar su gráfica con los datos obtenidos.

a) Llamaremos $f(t)=e^{-t^2}$ y G(t) va a ser una primitiva cualquiera de f(t): G'(t) = f(t).

Por la regla de Barrow, $F(x) = G(x^2) - G(0)$

Derivando,
$F'(x) = [G(x^2)]' - [G(0)]' = G'(x^2)\ .\ 2x - 0 = f(x^2)\ .\ 2x = e^{-(x^2)^2}\cdot 2x = 2x\,e^{-x^4}$

Para estudiar el crecimiento de F(x) hay que analizar el signo de F'(x). Como $e^{-x^4} > 0$ siempre, el único punto singular [F'(x)=0] es x = 0. El esquema es:

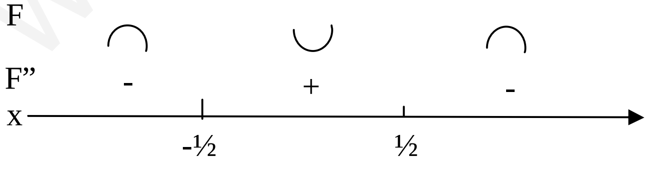


Hay un mínimo en x = 0. F(x=0) = $\int_{t=0}^{t=0} e^{-t^2}\,dt = 0$. El mínimo está en el punto (0,0).

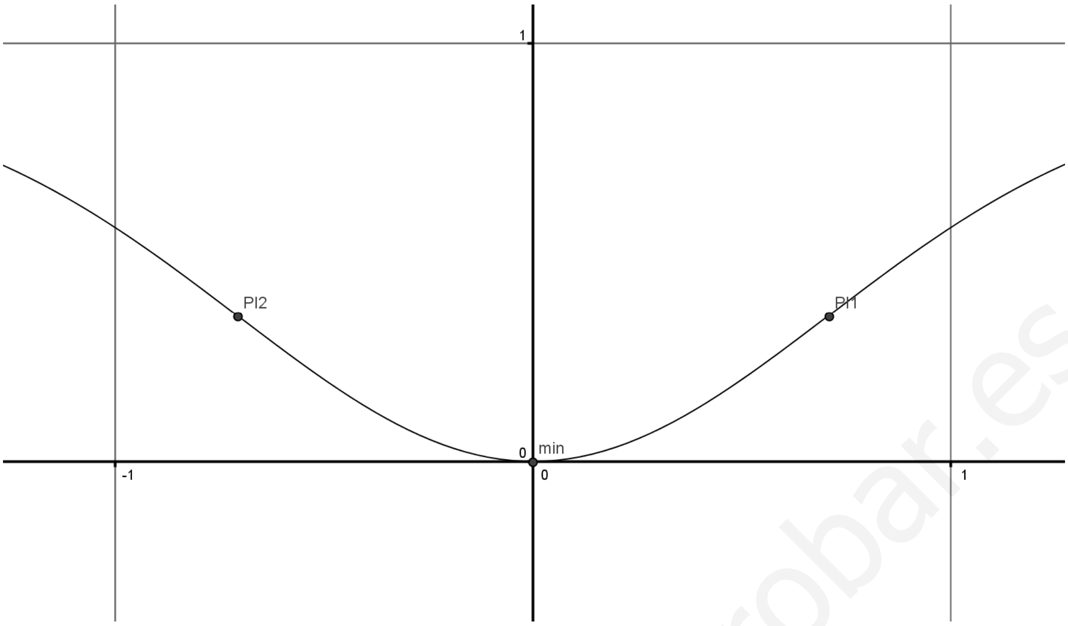
b) Como $F'(x) = 2x\ .\ e^{-x^4}$ $\rightarrow$ $F''(x) = 2\,e^{-x^4} + 2x\ .\ \left(-4x^3\cdot e^{-x^4}\right) = 2\,e^{-x^4}\,(1-4x^4)$

Al igual que antes, como $e^{-x^4}>0$, $F''(x) = 0 \rightarrow 1-4x^4 = 0 \rightarrow 1 = 4x^4 \rightarrow x^4 = ¼$

$\rightarrow x^2 = ½ \rightarrow x = \pm\sqrt{1/2}$



La gráfica de F(x) podría ser así:



Calcular las asíntotas, concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \left(\frac{1}{1+e^{-\infty}}\right) = \left(\frac{1}{1+0^{+}}\right) = 1^{-}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \left(\frac{1}{1+e^{\infty}}\right) = \left(\frac{1}{1+\infty}\right) = 0^{+}$$

Hay dos asíntotas horizontales diferentes, una por - ∞ (y = 0 , es decir el eje OX, y la gráfica se aproxima a esa recta por encima) y otra por + ∞ (la recta y = 1, a la que la gráfica de la función se acerca por debajo).

Asíntotas verticales: no hay ninguna puesto que el dominio de definición de f(x) es todo R, dado que el denominador nunca puede valer 0 ($e^{-x} > 0$ siempre).

Asíntotas oblicuas: no puede haber puesto que hay horizontales.

Para estudiar su curvatura necesitamos la segunda derivada.

$$y = f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \left(1+e^{-x}\right)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\left(-e^{-x}\right) = e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2} = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{2} - 2\left(1+e^{-x}\right)\left(-e^{-x}\right)e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{4}} = \frac{e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)\left[-\left(1+e^{-x}\right)+2e^{-x}\right]}{\left(1+e^{-x}\right)^{4}} =$$

$$= \frac{e^{-x}\left(-1+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^{3}}$$

Como $e^{-x} > 0$, también será $1 + e^{-x} > 0$, por lo que el único término que puede cambiar de signo es $-1 + e^{-x}$

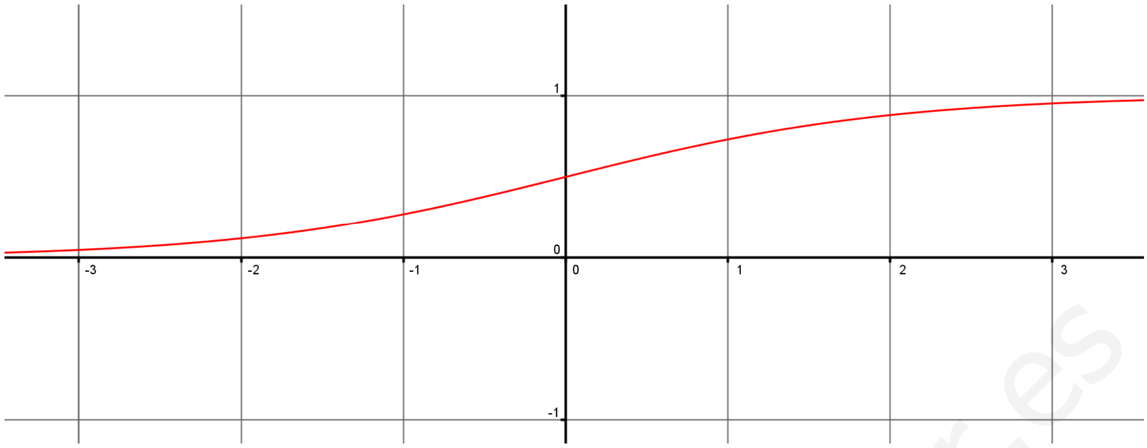
Así, $f''(x) = 0 \rightarrow -1 + e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow x = 0$

Si $x < 0$, $-x > 0 \rightarrow e^{-x} > 1 \rightarrow -1 + e^{-x} > 0 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow$ f será cóncava

En cambio, si $x > 0$, $-x < 0 \rightarrow e^{-x} < 1 \rightarrow -1 + e^{-x} < 0 \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow$ f será convexa

Y en x = 0 hay un punto de inflexión: (0 , ½).

La gráfica resulta así:



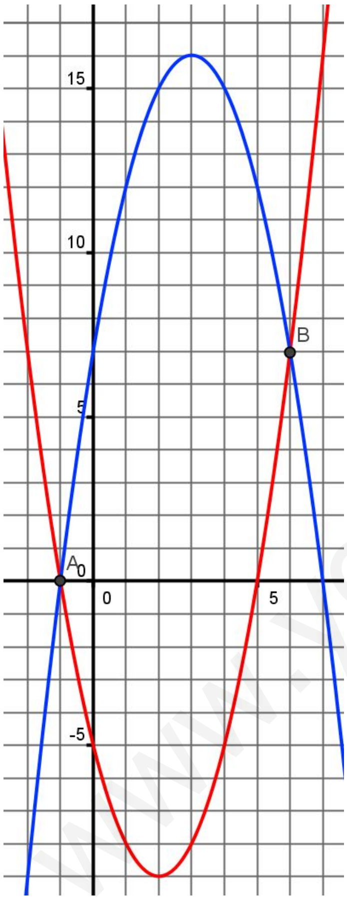
Esta gráfica es una versión muy sencilla de la curva logística, modelo matemático del crecimiento de una población.

a) Dibujar las parábolas $y = x^2 - 4x - 5$; $y = -x^2 + 6x + 7$.   b) Determinar el área del recinto acotado que limitan dichas parábolas.

Tanto para dibujarlas como para hallar el área pedida nos interesa calcular los puntos de corte de ambas parábolas: $x^2 - 4x - 5 = -x^2 + 6x + 7 \rightarrow 2x^2 - 10x - 12 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \rightarrow x = 6 \;,\; x = -1$

a) Para representarlas haremos una tabla de valores conjunta:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_1	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7
y_2	0	7	12	15	16	15	12	7



b) El área pedida se calculará así:

$$A = \int_{x=-1}^{x=6} (y_2 - y_1)\,dx$$

$y_2 - y_1 = -2x^2 + 10x + 12$

$G(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 12x$

$G(6) = -\frac{2}{3} \cdot 216 + 180 + 72 = 108$

$G(-1) = \frac{2}{3} + 5 - 12 = -7 + \frac{2}{3}$

$$A = \int_{x=-1}^{x=6} (y_2 - y_1)\,dx = 108 + 7 - \frac{2}{3} = 114 + \frac{1}{3}\ u^2$$

Calcular $\int_0^1 \ln(2x+1)dx$, donde ln indica logaritmo neperiano.

Utilizaremos el método de integración por partes para calcular una primitiva G(x):

u = ln (2 x + 1) ; dv = dx

du = $\frac{2}{2x+1}$ dx ; v = x

Por tanto G(x) = x . ln (2 x + 1) - $\int \frac{2x}{2x+1}dx$ = x . ln (2 x + 1) - $\int \frac{2x+1-1}{2x+1}dx$ =

= x . ln (2 x + 1) - $\left(\int 1dx - \int \frac{1}{2x+1}dx\right)$ = x . ln (2 x + 1) – x + $\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}dx$ =

= x . ln (2 x + 1) – x + ½ ln $|2x+1|$

Aplicando ahora la regla de Barrow:

$\int_0^1 \ln(2x+1)dx$ = G(1) – G(0) = ln 3 – 1 + ½ ln 3 – (0 – 0 + ½ ln 1) = 1,5 ln 3 – 1 – (0) =
= 1,5 ln 3 - 1

Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{3x}{x^2-9}$, hallando sus asíntotas horizontales y verticales, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x^2-9} = 0^{\pm}$ Por tanto la recta y = 0 (el eje OX) es asíntota horizontal de la gráfica de f. Por +∞ la función está por encima del eje OX mientras que por -∞ la gráfica queda por debajo del eje OX.

Asíntotas verticales:

Obviamente los valores a considerar son x = ±3

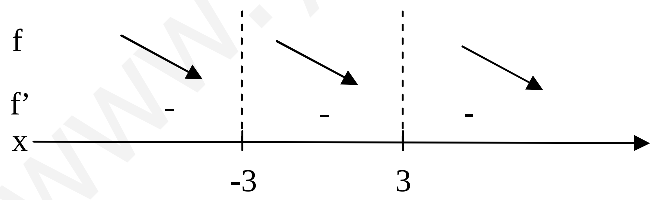
$$\lim_{x\to 3^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{3x}{x^2-9} = \left(\frac{9}{0^{\pm}}\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -3^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to -3^{\pm}} \frac{3x}{x^2-9} = \left(\frac{-9}{0^{\mp}}\right) = \pm\infty$$

Por lo tanto las rectas x = - 3 , x = 3 son asíntotas verticales.

Estudio de la primera derivada:

f'(x) = $\frac{3.(x^2-9)-2x.3x}{(x^2-9)^2} = \frac{3x^2-27-6x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{-3x^2-27}{(x^2-9)^2}$ < 0 para cualquier valor de x (dentro del dominio de f).



Segunda derivada:

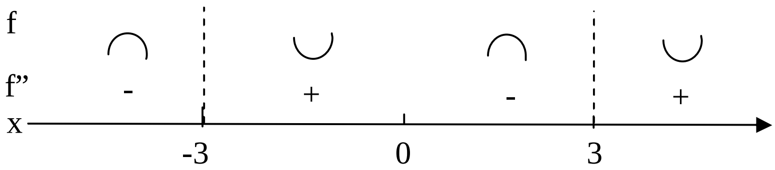
f''(x) = $\frac{-6x.(x^2-9)^2-2.(x^2-9).2x.(-3x^2-27)}{(x^2-9)^4}$ =

$= \frac{-6x.(x^2-9)^2-2.(x^2-9).2x.(-3).(x^2+9)}{(x^2-9)^4} = \frac{-6x.(x^2-9)^2+6x.(x^2-9).2.(x^2+9)}{(x^2-9)^4} =$

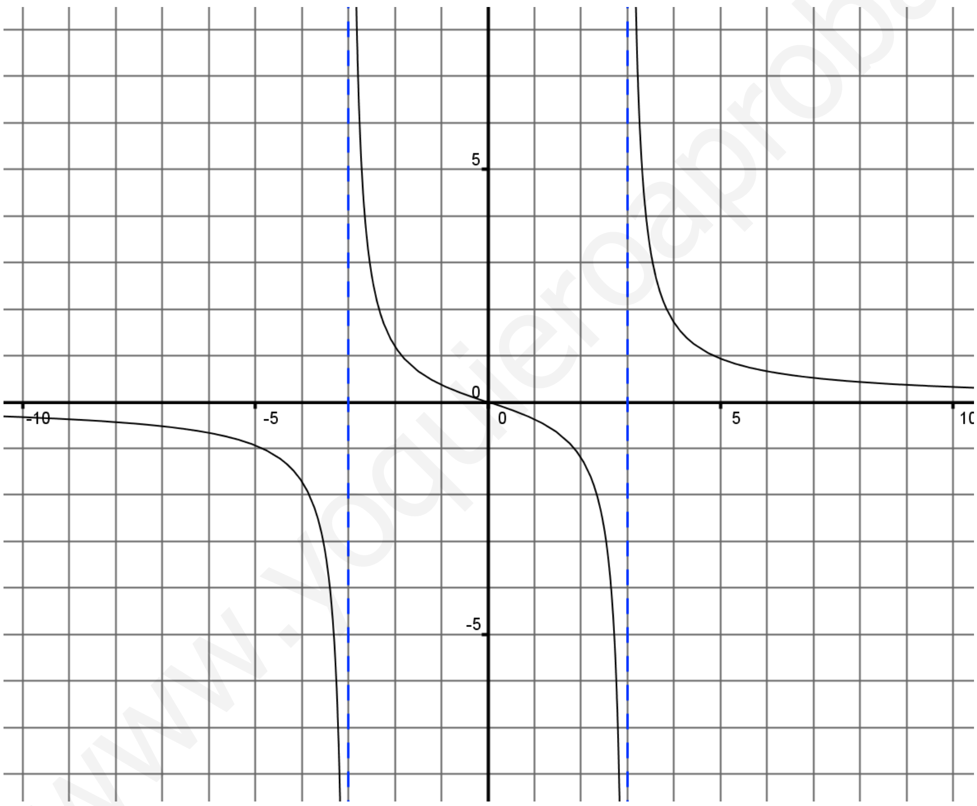
$$= \frac{6x.(x^2-9).\left[-(x^2-9)+2(x^2+9)\right]}{(x^2-9)^4} = \frac{6x.(x^2-9).(x^2+27)}{(x^2-9)^4}$$

Los factores (x^2+27) y $(x^2-9)^4$ son positivos para cualquier valor de x (dentro del dominio de f), por lo que los puntos singulares (f' = 0) son, x = 0 , x = ± 3.

Analizando el signo de f'' en cada uno de los cuatro intervalos que resultan, se obtiene:



Sólo hay punto de inflexión en x = 0 , y = 0; en x = ± 3 no existe la función.



Calcular el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \; sen\, x \; dx$

Siempre que aparezca $|x|$ tendremos que separar la integral propuesta en otras dos, una para x > 0 (donde $|x| = x$) y otra para x < 0 (donde $|x| = -x$).

$$I = \int_{-\pi}^{2\pi} |x| \; sen\, x \; dx = \int_{-\pi}^{0} (-x) \; sen\, x \; dx + \int_{0}^{2\pi} x \; sen\, x \; dx = - \int_{-\pi}^{0} x \; sen\, x \; dx + \int_{0}^{2\pi} x \; sen\, x \; dx$$

La expresión subintegral es la misma en ambas; sólo hará falta calcular una primitiva:

$G(x) = \int x \; sen\, x \; dx$ = [por partes*] = - x cos x - $\int (-\cos x) \; dx$ = - x cos x + sen x

[*]: u = x , dv = sen x dx $\rightarrow$ du = dx , v = - cos x

Hará falta calcular

G(-π) = π cos (-π) + sen (-π) = π . (-1) + 0 = -π

G(0) = 0

G(2π) = - 2π cos 2π + sen 2π = - 2π . 1 + 0 = - 2π

Luego, I = - [G(0)-G(-π)] + [G(2π) – G(0)] = G(-π) + G(2π) = -π - 2π = - 3π

a) Determinar las funciones (definidas sobre toda la recta real y que toman valores reales) que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico (x,y) de su gráfica viene dada por la expresión $x\,e^x$.

b) Hallar los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de aquélla de las funciones del apartado anterior que pasa por el punto (0,1).

a) La pendiente de la recta tangente a una curva [a la gráfica de una función y = f(x)] en un punto cualquiera (x,y) es el valor de la derivada para ese valor de la x: f'(x).

Por tanto lo que nos están diciendo, con una redacción muy formalista, es que encontremos todas las funciones f(x) de forma que $f'(x) = x\,e^x$. O sea que hallemos una primitiva cualquiera de $x \cdot e^x$.

Pues a ello:

$f(x) = \int x.e^x\,dx$ = [*por partes] = $x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x = e^x\,(x-1) + C$

[*]: $u = x$, $dv = e^x\,dx \rightarrow du = dx$, $v = e^x$

b) Ahora hay que hallar el valor de la constante de integración C para encontrar cuál de esas funciones f(x) pasa por el punto (0,1).

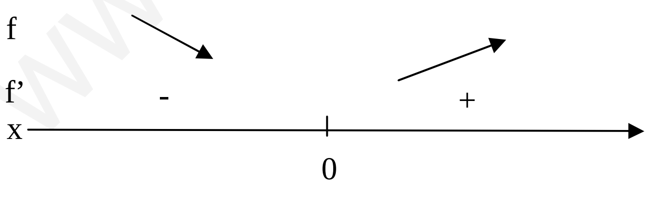
Debe suceder que f(0) = 1, pero $f(0) = -1 + C \rightarrow -1 + C = 1 \rightarrow C = 2$

Y la función pedida es $f(x) = e^x\,(x-1) + 2$

Pero, en realidad, todo esto no nos hace ninguna falta, puesto que para estudiar el crecimiento de f(x) lo que tenemos que hacer es analizar el signo de su derivada f'(x). Resulta que, con independencia del valor concreto de la constante de integración C, f'(x) siempre tienen que ser igual a $x \cdot e^x$.

En resumidas cuentas, hay que estudiar el signo de $f'(x) = x \cdot e^x$.

Como $e^x > 0$ siempre, el único punto singular (y' = 0) es x = 0:



La función $f(x) = e^x\,(x-1) + C$ (valga lo que valga C) decrece en $(-\infty,0)$, crece en $(0,\infty)$ y tiene un mínimo (relativo y absoluto) en x = 0.

Para lo que sí hace falta el valor de C antes calculado es para determinar dónde está ese mínimo, para hallar lo que vale f(0): $f(0) = e^0\,(0-1) + 2 = -1+2 = 1$.
El mínimo está en el punto (0,1).