1) Un triángulo tiene vértices (0,0,0) , (1,1,1) y el tercer vértice situado en la recta $x = 2y$, $z = 1$. Calcular las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$ u^2.

Datos: los puntos A (0,0,0) y B (1,1,1) y las ecuaciones implícitas de una recta (r).

Incógnita: un punto C, tal que $\begin{cases} C \in r \\ \acute{a}rea\ \ ABC = \sqrt{2}/2 \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de **r** : x = 2 α , y = α , z = 1.

Como C∈ **r** → C (2α , α ,1).

El área del triángulo ABC = 2 $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2}$

AB = (1,1,1) , AC = (2α,α,1) $\quad$ AB x AC = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2\alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix}$ = (1- α , 2 α – 1 , - α)

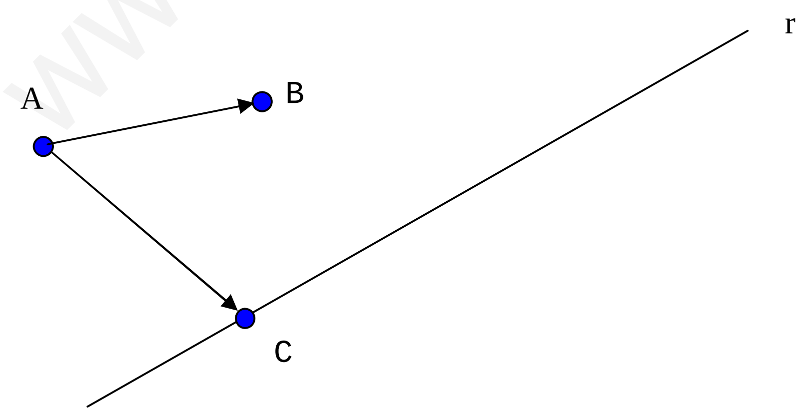
$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2\alpha-1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{2}$$

Al eliminar las raíces cuadradas queda: (1- α)5 + (2 α - 1)5 + α5 = 2 →

α5 – 2 α + 1 + 1 – 4 α + 4 α5 + α5 = 2 → 6 α5 – 6 α + 2 = 2 → 3 α5 – 3 α + 1 = 1

→ 3 α5 – 3 α =0 → 3 α (α - 1) = 0 → α = 0 , α = 1

Para α = 0 → C_1(0 , 0 , 1) y para α = 1 → C_2(2 , 1 , 1).



2) Dados el plano π: x + y + a z = b y la recta r: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y+z-4=0 \end{cases}$, calcula a y b de modo que:
i) r y π sean secantes. ¿En qué punto se cortan?
ii) r y π sean paralelos.
iii) r esté contenida en π.

Ecuaciones paramétricas de r (haciendo y = t): x = 2 – t , y = t , z = 4 – 2 t

$\pi \cap r$: 2 – t + t + a (4 – 2 t) = b → 2 + 4 a – 2 a t = b [*] →

$$t = \frac{2+4a-b}{2a} = 2 + \frac{2-b}{2a}$$

Siempre que a ≠ 0, será posible despejar t ⇒ $r \cap \pi$ = P.

Coordenadas de P: $x = 2 - \left(2+\frac{2-b}{2a}\right) = \frac{b-2}{2a}$, $y = 2+\frac{2-b}{2a}$

$z = 4-2\left(2+\frac{2-b}{2a}\right) = 4-4-\frac{2-b}{a} = \frac{b-2}{a} \rightarrow P\left(\frac{b-2}{2a}, 2+\frac{2-b}{2a}, \frac{b-2}{a}\right)$

Si a = 0 , la ecuación [*] queda 2 + 0 · t = b

Si b = 2 , 2 + 0 · t = 2 → 0 · t = 0 hay infinitas soluciones: r está contenida en π.

Si b ≠ 2, 2 + 0 · t = b → 0 · t = b – 2 ≠ 0 es incompatible, no hay $\pi \cap r$ es decir, r será paralela a π.

	b = 2	b ≠ 2
a ≠ 0	Se cortan	Se cortan
a = 0	contenida	paralela

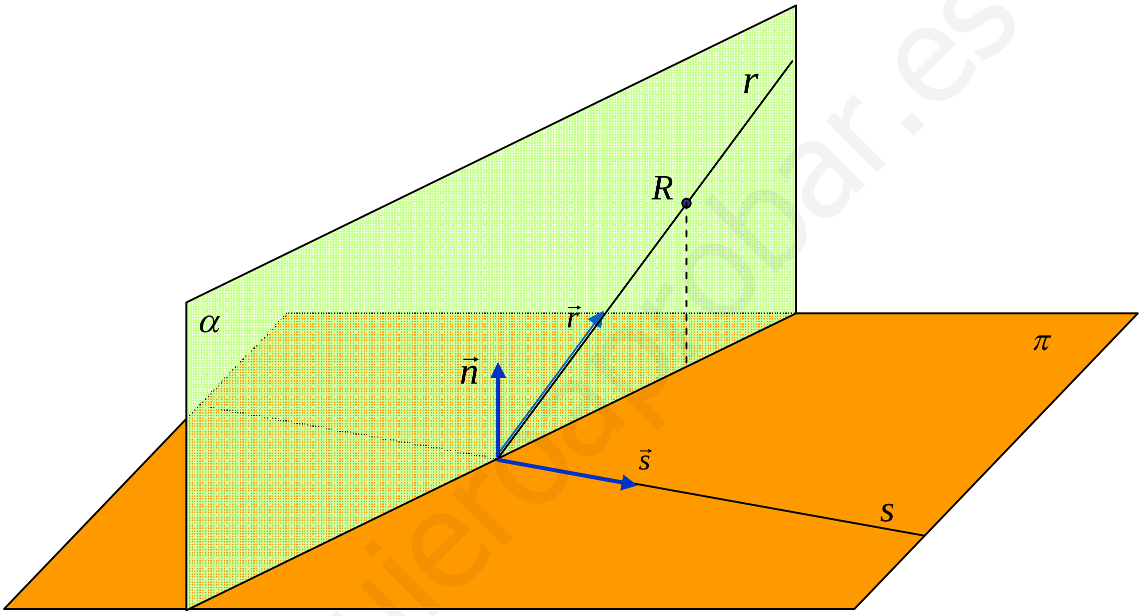
Alternativa: todo el ejercicio puede enfocarse también mediante el estudio del sistema formado por las tres ecuaciones (la del plano π y las de las ecuaciones implícitas de r).

3) Sean la recta r: $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi: \ x - y + z - 5 = 0$

a) Hallar un plano que contenga a la recta r y que sea perpendicular a π.

b) ¿Hay algún punto de la recta r cuya distancia al plano π sea igual a $\sqrt{3}$? Averiguar sus coordenadas.

c) Encontrar una recta que corte perpendicularmente a r y que esté contenida en el plano π.



a) Comprobamos la posición relativa de r y π:

$r \cap \pi: \ 2 - \lambda - \lambda + 2 + \lambda - 5 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1 \ \rightarrow$ r corta a π en un punto.

El plano pedido (α) se define así: $\alpha: \begin{cases} r \subset \alpha \\ \alpha \perp \pi \end{cases}$

Luego el plano α queda definido por: $\alpha: \begin{cases} R \in r \\ \vec{d}_1 = \vec{r} \\ \vec{d}_2 = \vec{n} \end{cases} \rightarrow \ \alpha: \begin{cases} R(2,0,2) \\ \vec{d}_1 = \vec{r}\,(-1,1,1) \\ \vec{d}_2 = \vec{n}\,(1,-1,1) \end{cases} \rightarrow$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-2) + 2y + 0(z-2) = 2x + 2y - 4 = 0$$

Simplificando, la ecuación del plano pedido es α: x + y – 2 = 0

b) Como el punto $R \in r \Rightarrow R = (2-\lambda, \lambda, 2+\lambda)$

$$d(R,\pi) = \frac{|2-\lambda-\lambda+2+\lambda-5|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad |-\lambda-1| = 3$$

ecuación que se desdobla en dos:

$-\lambda-1 = 3 \rightarrow \lambda = -4 \rightarrow R_1 = (6, -4, -2)$
$-\lambda-1 = -3 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow R_2 = (0, 2, 4)$

c) La recta pedida (s) debe cumplir: $s \begin{cases} s \text{ corta a } r \\ s \perp r \\ s \subset \pi \end{cases}$

Como $s \subset \pi$ y s debe cortar a r $\rightarrow$ s tiene que pasar por el punto $P = r \cap \pi$

$$Como\ \ s \subset \pi \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \quad y \quad como \quad s \perp r \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{s} = \vec{n} \times \vec{r} = \vec{n}_\alpha$$

Al comprobar la posición relativa de r con respecto a π ya vimos que sí se cortan en un punto y que ese punto de corte se obtiene para $\lambda = -1 \rightarrow P = (3, -1, 1)$

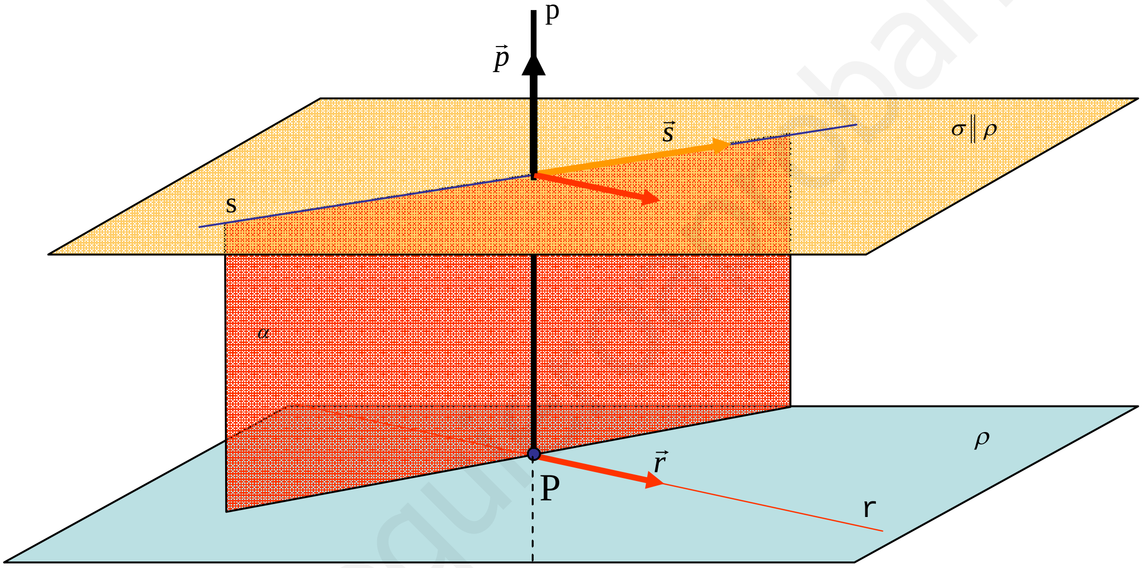
$$\vec{n}_\alpha = (1,1,0) = \vec{s} \rightarrow s: \begin{cases} P(3,-1,1) \\ \vec{s}\ (1,1,0) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1 \end{cases}$$

Modelo de examen 2

1) Dadas las rectas en el espacio $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ $\qquad s \equiv \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

a) Hallar la distancia entre las dos rectas.
b) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Conviene comenzar comprobando que las rectas se cruzan sin cortarse. Hecho esto las dibujamos, como siempre, situadas (contenidas) en dos planos paralelos. La distancia entre r y s es la misma que la distancia entre esos dos planos.



a) $$\sigma\begin{cases} s \subset \sigma \\ r \parallel \sigma \end{cases} \rightarrow \sigma\begin{cases} S(-1,-2,1) \\ \vec{s}\,(2,-1,2) \\ \vec{r}\,(3,-2,1) \end{cases} \rightarrow \sigma : \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sigma : 3.(x+1)+4.(y+2)-(z-1)=0 \quad \rightarrow \quad \sigma : 3x+4y-z+12=0$$

$$d(r,s)=d(\rho,\sigma)=d(R,\sigma)=\frac{|3.2+4.1-0+12|}{\sqrt{9+16+1}}=\frac{22}{\sqrt{26}}\,unidades.$$

b) Llamamos p a la perpendicular común. $\vec{p}=n_\sigma=(3,4,-1)$

Ya tenemos el vector director de la recta buscada p. Ahora necesitamos un punto de ella. Lo conseguiremos utilizando el plano auxiliar α.

$$\alpha : \begin{cases} r \subset \alpha \\ \alpha \perp \sigma \end{cases} \rightarrow \alpha : \begin{cases} R(2,1,0) \\ \vec{r}\,(3,-2,1) \\ \vec{p}\,(3,4,-1) \end{cases} \rightarrow \alpha : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \alpha : (-2).(x-2)+6.(y-1)+18.z=0 \quad \rightarrow \quad \alpha : -x+3y+9z-1=0$$

Y el punto de intersección del plano α y de la recta r tiene que ser el único punto de r "que está justo debajo" de la recta s.

$$P=\alpha\cap r \quad\rightarrow\quad -(2\lambda-1)+3(-\lambda-2)+9\lambda-1=0 \quad\rightarrow\quad 4\lambda-6=0 \quad\rightarrow$$

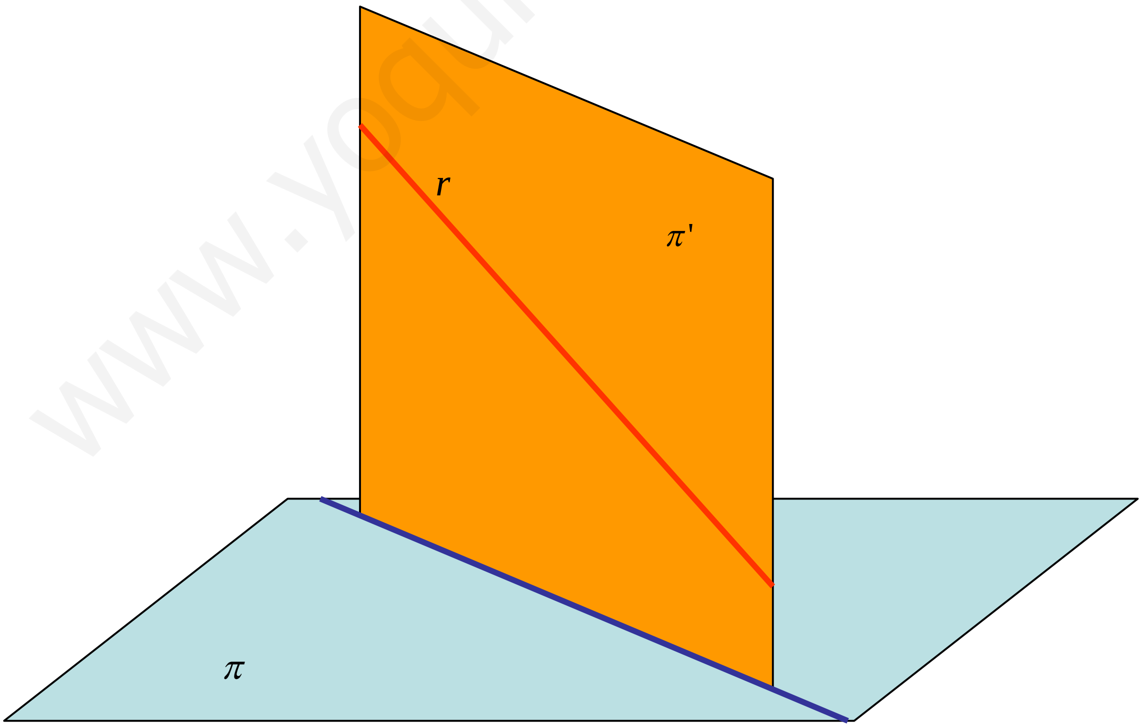
$$\rightarrow\quad \lambda=\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad P=\left(2,-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(2,-3'5,1'5\right)$$

Así que la recta p buscada será: $p:\begin{cases}P\\ \vec{p}\end{cases} \quad\rightarrow\quad p:\frac{x-2}{3}=\frac{y+3{,}5}{4}=\frac{z-1{,}5}{-1}$

2) Dados el plano π: x + 3 y – z = 1 y la recta $r\equiv\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=z$ se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π , π'.

Aquí también lo primero que habría que hacer es verificar que la recta y el plano se cortan en un punto y hacer un dibujo como éste:



$$a)\ \pi':\begin{cases} r\subset\pi' \\ \pi'\perp\pi \end{cases} \quad\rightarrow\quad \pi':\begin{cases} R(-2,10) \\ \vec{r}\,(6,2,1) \\ \vec{n}_{\pi}\,(1,3,-1) \end{cases} \quad\rightarrow\quad \pi':\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \pi':-5.(x-2)+7.(y-1)+16\,.z=0 \quad\rightarrow\quad \pi':-5x+7y+16z+3=0$$

b) La intersección de ambos planos será una recta (la proyección ortogonal de r sobre el plano π). Como nos piden unas ecuaciones paramétricas habrá que resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos.

$$\pi\cap\pi':\begin{cases} x+3y-z=1 \\ -5x+7y+16z-17=0 \end{cases} \rightarrow \left[e_2\rightarrow 5e_1+e_2\right]\rightarrow\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 22y+11z-22=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\left[e_2\ \rightarrow\frac{1}{11}e_2\right]\rightarrow\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}\rightarrow \quad \begin{cases} x+3y-z=1 \\ z=2-2y \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1-3y+z=3-5\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$$

3) a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

π_1 : 2 x + 3 y + k z = 3 $\quad$ π_2 : x + k y – z = - 1 $\quad$ π_3 : 3 x + y – 3 z = - k

b) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

a) Estudiamos directamente el sistema formado por las tres ecuaciones. Para ello calculamos (en función de k) el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\left[c_3\rightarrow c_3+c_1\right]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & k+2 \\ 1 & k & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(k+2).(1-3k)$$

$$|A|=0\rightarrow(k+2).(1-3k)=0\ \rightarrow\ k=-2\ \vee\ k=\frac{1}{3}$$

$$Si\ \ -2\neq k\neq\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ |A|\neq 0\ \Rightarrow rango(A)=3=rango(A')\ \Rightarrow$$

el sistema es compatible determinado y los tres planos se cortarán en un punto. Además, como rango(A) = 3 eso quiere decir que los tres vectores normales a los planos son independientes, es decir que los planos, dos a dos, siempre se cortan en una recta. Su posición relativa es similar a los tres planos coordenados OXY, OXZ, OYZ.

Veamos qué ocurre para cada uno de los valores críticos de k.

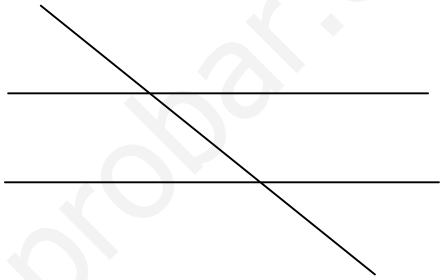
Para k = 2, el sistema queda: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

La tercera fila es la suma de las dos primeras, por lo que el sistema resulta ser compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una misma recta.

Por último, para k = ⅓ el sistema resulta ser

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to [e_3 \to e_3 - 3e_2] \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1/3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir dos cosas: (a) que el sistema es incompatible (no hay ningún punto en común a los tres planos) y además (b) que los dos vectores normales de π_2 y π_3 son proporcionales, por lo que estos dos planos serán paralelos y el otro los cortará a ambos. Un esquema de su posición sería así:



b) Podemos hallar un vector director de la recta r común a los tres planos (k = 2) mediante el producto vectorial de los vectores normales de dos cualesquiera de esos planos. Eligiendo π_2 y π_3 resulta:

$$\vec{r} = \vec{n}\pi_2 \times \vec{n}\pi_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-7,0,-7) \equiv (1,0,1)$$