REGLA DE L´HÔPITAL PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

---

1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

a) (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de *f*. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
b) (1 puntos) Estudiar si *f* tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

a) La función es discontinua cuando $1 - x^6 = 0 \Rightarrow$ x = –1 o x = 1.

La discontinuidad puede evitarse si existe límite.

En x = –1 la discontinuidad no puede evitarse pues la función no tiene límite en ese punto:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \infty$$

En x = 1, como $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(L´H)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \frac{5-8}{-6} = \frac{1}{2}$, la discontinuidad puede evitarse, definiendo $f(1) = \frac{1}{2}$

b) La recta x = –1 es asíntota vertical de la función pues $\lim_{x \to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \infty$. Además, puede observarse que si $x \to -1^{-1}$, f(x) → + ∞; y si x → -1^{+1}, f(x) → – ∞.
c)

---

2. Calcular los siguientes límites:
a) (1,5 puntos) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$
b) (1,5 puntos) $\lim_{x \to \infty} x\left[arctg\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$

Solución:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}$ = (dividiendo por x) = 1

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$ = [∞ · (π/2 – π/2)] = [∞ · 0] =

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left(L\acute{}H\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left(L\acute{}H\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2xe^x - x^2e^x}{2e^{2x}} = \text{(dividiendo por } e^x\text{)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-x^2}{2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left(L\acute{}H\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2-2x}{2e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left(L\acute{}H\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2e^x} = 0$$

---

3. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2x^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(por L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x + 2x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 2}{4} = \frac{3}{4}$$

---

4. Sea la función

$$f(x) = \frac{4x + sen2x}{sen3x}$$

Determinar el dominio de *f* (1 punto) e indicar si *f* tiene límite finito en algún punto que no sea de su dominio. (1,5 puntos)

Solución:

La función no está definida cuando sen 3x = 0 ⇒ 3x = kπ ⇒ x = kπ/3.

Por tanto, Dom(*f*) = **R** – {kπ/3, k ∈ **Z**}

Es posible que tenga límite finito en *x* = 0, único punto donde también se anula el numerador. Veamos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x + sen2x}{sen3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L\acute{}H) = \lim_{x\to 0} \frac{4 + 2\cos 2x}{3\cos 3x} = \frac{6}{3} = 2$$

En el punto *x* = 0 la función tiene límite finito, y vale 2.

5. Calcúlese $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(x)}{e^x}$.

Solución:
Lo haremos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$$

---

6. Calcúlese el valor de $\underset{x\to\pi/2}{lím} \dfrac{tg(2x)}{tg(6x)}$.

Solución:
Lo calcularemos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\underset{x\to\pi/2}{lím} \frac{tg(2x)}{tg(6x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \underset{x\to\pi/2}{lím} \frac{(1+tg^2(2x))\cdot 2}{(1+tg^2(6x))\cdot 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

---

7. Calcula el límite: $\underset{x\to 0}{lím} \dfrac{xsenx}{1-\cos x}$

Solución:
El siguiente límite lo haremos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\underset{x\to 0}{lím} \frac{xsenx}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \underset{x\to 0}{lím} \frac{senx + x\cos x}{senx} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L´H) = \underset{x\to 0}{lím} \frac{\cos x + \cos x - xsenx}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

---

8. Calcúlese el valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$.

Solución:
Lo haremos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-2sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2tag(2x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L´H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2(1+tag^2(2x))\cdot 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

9. Calcúlense los valores de λ ≠ 0 para los cuales $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=-1$.

Solución:

Lo calcularemos aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{2\text{x}\cos(x^2)}{-2\lambda\cos(\lambda x)(sen\lambda x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x^2)-4xsen(x^2)}{-2\lambda(-\lambda sen^2(\lambda x)+\lambda\cos^2(\lambda x))}=\frac{2}{-2\lambda^2}$$

Como el límite debe valer –1 se tendrá:

$$\frac{2}{-2\lambda^2}=-1\Rightarrow\lambda=\pm 1$$

---

10. Halla los puntos de discontinuidad de la función $y=\dfrac{tg(x)}{x}$

Nota: *x* está expresado en radianes.

Solución:

La función es discontinua los puntos en los que no esté definida, que son: $x = 0$ y $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

En $x = 0$ la discontinuidad es evitable, pues $\text{lím}_{x\to 0}\dfrac{tg(x)}{x}=1$.

En efecto: $\text{lím}_{x\to 0}\dfrac{tg(x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left(L'H\right)=\text{lím}_{x\to 0}\dfrac{1+tg^2(x)}{1}=1$

En $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, porque la tg(x) no está definida. En todos esos puntos la discontinuidad no puede evitarse.

---

11. Calcular el límite: $\text{lím}_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Solución:

$$\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).=[\infty-\infty]=\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right).=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L´Hôpital, se tiene:

$$\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right).=\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+(x-1)/x}\right)=.\left[\frac{0}{0}\right]=\text{lím}_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).=\frac{1}{2}$$

12. Calcular $\underset{x\to 0}{lím}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solución:

$$\underset{x\to 0}{lím}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty] = \underset{x\to 0}{lím}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L´Hôpital, se tiene:

$$\underset{x\to 0}{lím}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \underset{x\to 0}{lím}\left(\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \underset{x\to 0}{lím}\left(\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

---

13. Calcula $\underset{x\to 1}{lím}\dfrac{1}{x-1}\ln x$

Solución:

$$\underset{x\to 1}{lím}\frac{1}{x-1}\ln x = [\infty \cdot 0] = \underset{x\to 1}{lím}\frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L`H) = \underset{x\to 1}{lím}\frac{1/x}{1} = 1$$

---

14. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{4/x}$.

Solución:

Aplicaremos logaritmos y la regla de L´Hôpital (L´H).

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{4/x} = \left[1^{\infty}\right]$$

$$\ln(\lim_{x\to 0}(1+2x)^{4/x}) = \lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{4/x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\ln(1+2x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (\text{L´H}) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8}{1+2x}}{1} = 8$$

De donde,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{4/x} = e^{8}$$

15. Se considera la función $f(x) = x\ln|x|$ si $x \neq 0$.

a) ¿Qué valor hay que asignar a 0 para que la función sea continua?
b) ¿La función obtenida es derivable en $x = 0$?

Solución:

a) Será continua cuando $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x|$

Este límite indeterminado se resuelve por L´Hôpital.

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x\ln|x| = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

La función continua es: $f(x) = \begin{cases} x\ln|x|, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

b) La función puede definirse a trozos así:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x\ln x & x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f´(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1 & x < 0 \\ ? & x = 0 \\ \ln x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Cuando x → 0 la función derivada, tanto por la izquierda como por la derecha, tiende a –∞. En consecuencia, no es derivable en ese punto.

Por tanto, la función derivada es $f´(x) = \ln|x| + 1$ si $x \neq 0$

---

16. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/sen^2 x}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/sen^2 x} = \left[1^\infty\right]$.

Aplicaremos logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/sen^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln(\cos x)^{1/sen^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{sen^2 x}\ln(\cos x) = [\infty\cdot 0]$$

La última indeterminación se transforma en.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{sen^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \text{(aplicando L´H)} \to \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-senx}{\cos x}}{2senx\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x} = \frac{-1}{2}$$

El límite pedido vale: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/sen^2 x} = e^{-1/2}$

17. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + senx)^{1/x}$

Solución:
Es una forma indeterminada: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + senx)^{1/x} = [1^{\infty}]$

Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x + senx)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x + senx)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\cos x + senx) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x + senx)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-senx + \cos x}{\cos x + senx}}{1} = 1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + senx)^{1/x} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$$

---

18. Determina, si es posible, los valores del parámetro $k \in \mathbf{R}$ para que la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & \text{si} \quad x < 0 \\ (2x-k)^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$, sea continua en $x = 0$.

Solución:
Para que la función sea continua en $x = 0$ es necesario que los límites laterales en ese punto coincidan con $f(0)$, cuyo valor es k^2.

Por la derecha, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x-k)^2 = (-k)^2 = k^2$

Por la izquierda se tiene un límite indeterminado que hay que resolver con ayuda de la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L´H)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^x}{2-2e^{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L´H)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{-e^x}{-4e^{2x}} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, debe cumplirse que $k^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow k = \pm\dfrac{1}{2}$

19. a). Continuidad lateral de una función en un punto.
b) Analice la continuidad, en el punto x = 0, de la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x-1}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Solución:
a) Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Las continuidades laterales se definen así:

- f(x) es continua en el punto $x = a$ por la izquierda $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$
- f(x) es continua en el punto $x = a$ por la derecha $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$

Para que una función sea continua en $x = a$ es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

b) Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando la regla de L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x \ln 2}{1} = \ln 2$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Como esos límites no coinciden, la función no es continua en x = 0.

20. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{sen^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{sen^2 x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ = (aplicando L´Hôpital) = $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + senx}{2senx\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ = (L´H) =

= $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \cos x}{2\cos x \cos x - 2senxsenx} = \dfrac{2}{2} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \left[1^\infty\right]$ = (Transformamos) = $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x/2}\right)^{(x/2)\cdot 2} = e^2$

También se puede hacer aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital. Así:

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

= (L´H) = $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x+2} = 2$.

Por tanto: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$

21. Buscad los extremos relativos de la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ (4 puntos). Calculad $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (2 puntos). Haced una gráfica aproximada de esta función (4 puntos).

Solución:
La derivada es:

$$f(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}$$

La derivada se anula en x = ±1.

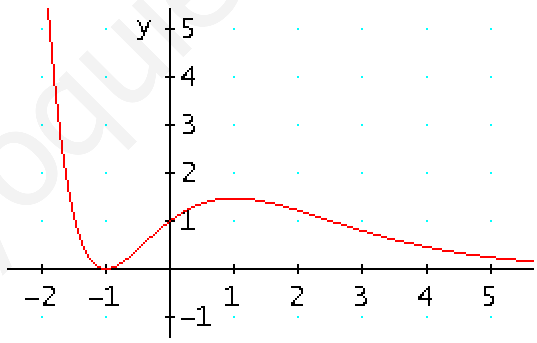
- Si x < –1, $f'(x)<0 \Rightarrow$ *f*(x) decrece.
- Si –1 < x < 1, $f'(x)>0 \Rightarrow$ *f*(x) crece. Por tanto en x = –1 hay un mínimo relativo.
- Si x > 1, $f'(x)<0 \Rightarrow$ *f*(x) decrece. Por tanto, en x = 1 hay un máximo relativo.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{0}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0^+ \Rightarrow$$ y = 0 es una asíntota horizontal de la curva.

Algunos valores de la curva son: (–2, e^2); (–1, 0); (0, 1); (1, 4/e); (2, $9/e^2$); (3, $16/e^3$);

Su gráfica aproximada es:



22. Calcula, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0^+} (sen(x))^{tg(x)}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{|x|}; \qquad \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \quad (\text{con } a > 0)$$

Solución:
En los tres casos se trata de formas indeterminadas.

- Para hacer $\lim_{x \to 0^+} (sen(x))^{tg(x)} = [0^0]$ aplicamos límites

$$\ln\left(\lim_{x \to 0^+} (sen(x))^{tg(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} \ln(sen(x))^{tg(x)} = \lim_{x \to 0^+} tgx \ln(sen(x)) = [0 \cdot \infty] =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(sen(x))}{\frac{\cos x}{senx}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{aplicando L´Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{-sen^2 x - \cos^2}{sen^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{-1}{sen^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} (-\cos x senx) = 0$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0^+} (sen(x))^{tg(x)} = e^0 = 1$

- La función $f(x) = \frac{sen(x)}{|x|} = \begin{cases} \frac{sen(x)}{-x}, & x < 0 \\ \frac{sen(x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Los límites laterales valen:

Por la izquierda: $\lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{sen(x)}{-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{-1} = -1.$

Por la derecha: $\lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{sen(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Como los límites laterales no coinciden no existe el límite cuando x $\to$ 0.

- $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

23. Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)^{2/x} \qquad\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2+x+5}-2}{1-\sqrt{2x-1}}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)^{2/x} = [1^{\infty}]$. Para resolver esta indeterminación aplicamos logaritmos.

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)^{2/x}\right] = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)^{2/x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\ln\left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(ahora, aplicando la regla de L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\dfrac{2x}{x^2+2}-\dfrac{-2\cos x}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)}{1} = 2\,.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,\mathrm{sen}\,x}\right)^{2/x} = e^2$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x+5}-2}{1-\sqrt{2x-1}} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ = (aplicando la regla de L´Hôpital) =

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{4x+1}{3\sqrt[3]{\left(2x^2+x+5\right)^2}}}{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}} = \frac{\dfrac{5}{12}}{-\dfrac{2}{2}} = -\frac{5}{12}$$