ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN CON AYUDA DE LA DERIVADA

<u>Observación</u>: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. a) Halla los valores de los coeficientes b, c y d para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje OY en el punto (0, −1), pase por el punto (2, 3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

Solución:

a) $y = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6x + 2b$

Por pasar por (0, –1) $\Rightarrow$ $-1 = d$
Por pasar por (2, 3) $\Rightarrow$ $3 = 8 + 4b + 2c + d$
Por tangente horizontal en x = 2, y´(2) = 0:
$\Rightarrow$ $0 = 12 + 4b + c$
Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones se obtiene:
$b = -5, \quad c = 8, \quad d = -1$

La función es $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$

b) Volviendo a derivar:
$y' = 3x^2 - 10x + 8; \qquad y'' = 6x - 10$
La derivada primera se anula en x = 4/3 y en x = 2.
Si x < 4/3, y´ > 0 $\Rightarrow$ la función crece.
Si 4/3 < x < 2, y´< 0 $\Rightarrow$ la función decrece. En consecuencia, en x = 4/3 se tendrá un máximo. (También puede verse que y´´(4/3) < 0.)
Si x > 2, y´ > 0 $\Rightarrow$ la función crece. En consecuencia, en x = 2 se tendrá un mínimo. (También puede verse que y´´(2) > 0.)

2. Sea f: **R** → **R** una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en (0, 0) y un máximo relativo en (2, 2). Calcular la expresión de dicha función. (2.5 puntos)

Solución:

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se tiene:

$$f´(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f´´(x) = 6ax + 2b$$

Por pasar por (0, 0), $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = d$
Por pasar por (2, 2), $f(2) = 2$ $\Rightarrow$ $2 = 8a + 4b + 2c + d$
Por mínimo en (0, 0), $f´(0) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = c$
Por máximo en (2, 2), $f´(2) = 0$ $\Rightarrow$ $0 = 12a + 4b + c$

Por tanto:

$d = 0$; $c = 0$; $a = -1/2$; $b = 3/2$

La función es:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

---

3. Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ y como asíntota horizontal la recta $y = 3$. Razonar si para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

Solución:

Para que la recta x = 2 sea asíntota vertical de f(x) es necesario que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \infty$.

Como $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \dfrac{2b}{2-a} = \infty \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$.

Para que la recta $y = 3$ sea asíntota horizontal de f(x) es necesario que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{bx}{x-a} = 3$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{bx}{x-a} = b \Rightarrow b = 3$.

Para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$.

Luego $f´(x) = \dfrac{3(x-2) - 3x}{(x-2)^2} = \dfrac{-6}{(x-2)^2}$

Como la derivada no se anula en ningún caso, la función no puede tener mínimos relativos (ni máximos).

4. Determina un punto de la curva $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

Solución:
La pendiente de la tangente es máxima en las soluciones de $y'' = 0$ (que son los puntos de inflexión) y que, además, verifican que $y''' < 0$.
Haciendo las derivadas se tiene:

$$y = xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = (-4x)e^{-x^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2} = (-6x+4x^3)e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y''' = (-6+12x^2)e^{-x^2} + (-6x+4x^3)(-2x)e^{-x^2} = (-6+24x^2-8x^4)e^{-x^2}$$

$$y'' = (-6x+4x^3)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -6x+4x^3 = 2x(-3+2x^2) \Rightarrow x = 0;\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y'''(0) = -6;\quad y'''(\pm\sqrt{3/2}) = (-6+36-18)e^{-3/2} > 0$$

El punto buscado es (0, 0).

---

5. ¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \cos(x) + 1$ en el intervalo [0, π]? Justifíquese su existencia y calcúlense.

Solución:
Los máximos y mínimos de una función, si los hay, se dan en los puntos que anulan su derivada. Además, en un máximo, la derivada segunda debe ser negativa, mientras, que en un mínimo debe ser positiva.

Derivando:

$$f'(x) = -\text{sen}\, x; \qquad f''(x) = -\cos x$$

$$f'(x) = -\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } \pi$$

$$f''(0) = -1;\ f''(\pi) = 1$$

Por tanto, la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = \pi$. Sus valores son:
máximo: $f(0) = \cos(0) + 1 = 2$; mínimo: $f(\pi) = \cos(\pi) + 1 = 0$.

Ambos son absolutos, pues $-1 \le \cos x \le 1$.

6. Demostrad que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión. Buscad la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) donde x_0 es el valor de x que hace mínima $y´´$.

Solución:
Hacemos las derivadas sucesivas:

$$y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$
$$y´= 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$
$$y´´= 12x^2 - 6x + 2$$
$$y´´´= 24x - 6 \Rightarrow y^{4)} = 24$$

Los puntos de inflexión se dan en las soluciones de la ecuación $y´´ = 0$. Como $y´´= 12x^2 - 6x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales, la curva no tiene ningún punto de inflexión.
(En efecto: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 96}}{24}$ no es real.)

La función $y´´$ se hace mínima (o máxima) en la solución de $y´´´= 24x - 6 = 0$, que es $x = \dfrac{1}{4}$:

Efectivamente es mínimo pues $y^{4)} = 24 > 0$.
La ecuación de la tangente es:

$$y - f(1/4) = f´(1/4)(x - 1/4) \Leftrightarrow y - \frac{205}{256} = -\frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$f(1/4) = \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{205}{256}; \quad f´(1/4) = 4\frac{1}{4^3} - 3\frac{1}{4^2} + 2\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$$

7. Sea f: **R** → **R** la función definida por $f(x) = e^x(ax + b)$, donde a y b son números reales.
a) Calcula los valores de a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (3, e^3).
b) Para los valores de a y b obtenidos, dígase que tipo de extremo tiene la función en el punto mencionado.

Solución:
a) Que la función tenga un extremo relativo en el punto (3, e^3) significa:
1.º $f(3) = e^3 \Leftrightarrow f(3) = e^3(3a + b) = e^3 \Rightarrow 3a + b = 1$
2.º $f´(3) = 0$. Como $f´(x) = e^x(ax + b) + ae^x \Rightarrow e^3(3a + b) + ae^3 = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$

Se tiene el sistema: $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 4$

b) La función es $f(x) = e^x(-x + 4)$, y sus derivadas primera y segunda:

$$f´(x) = e^x(-x + 4) - e^x = e^x(-x + 3); \quad f´´(x) = e^x(-x + 3) - e^x = e^x(-x + 2)$$

Es evidente que $f´(3) = 0$, por tanto en ese punto se tiene un extremo.

Como $f´´(3) = -e^3 < 0$, se trata de un máximo.

8. Considera la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

a) Calcula *c* sabiendo que su recta tangente en el punto de abscisa x = 0 es horizontal.

b) Para el valor de *c* hallado en el apartado anterior, calcula *a* y *b* sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = –2 y que corta al eje OX cuando x = 1.

c) Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcula los intervalos donde la función crece y decrece, sus extremos relativos y haz una representación gráfica aproximada.

Solución:

Derivada primera y segunda:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

a) Si la recta tangente en x = 0 es horizontal entonces $f'(0) = 0$.

Como $f'(0) = c \Rightarrow c = 0$.

La función será $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7$

b) Si la función tiene un extremo relativo en x = –2, entonces $f'(-2) = 0$.

Si corta al eje OX en x = 1, entonces $f(1) = 0$.

En consecuencia:

$$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \Rightarrow 3a - b = 8$$
$$f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \Rightarrow a + b = -8$$

Resolviendo el sistema se obtiene: *a* = 0; *b* = –8.

c) La función será $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16$.

- $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -2; x = 2$. Estos puntos son posibles máximos o mínimos.

Para:

x < –2, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

–2 < x < 0, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece;

0 < x < 2, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece;

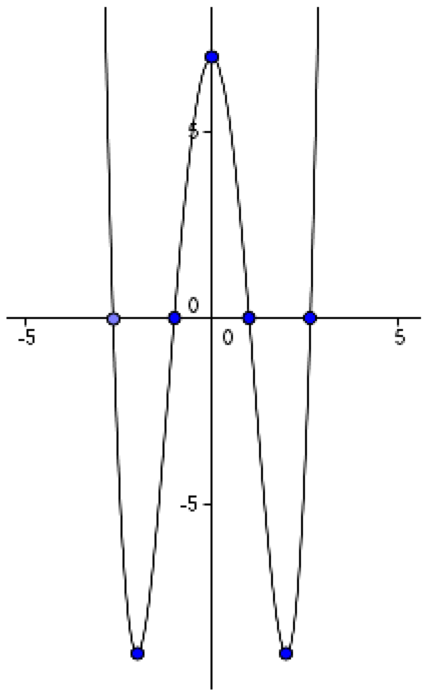
x > 2, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece

Como:

$f''(-2) = 32 > 0$, en x = –2 hay un mínimo;

$f''(0) = -16 < 0$, en x = 0 hay un máximo;

$f''(2) = 32 > 0$, en x = 2 hay un mínimo.



Dando algunos valores podemos trazar su gráfica.

Puntos: (–2, –9); (–1, 0); (0, 7); (1, 0); (2, –9).

Además la curva corta a los ejes en las soluciones de $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$, que son $x = \pm\sqrt{7}$ y $x = \pm 1$.

Por tanto, la curva es la adjunta.

9. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 4]. Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y de los cortes con los ejes.

$$f(x) = 2sen\frac{\pi}{4}x \qquad 0 \le x \le 4$$

$$g(x) = sen\frac{\pi}{2}x \qquad 0 \le x \le 4$$

Solución:
Debe recordarse que la función $f(x) = sen(nx)$ es periódica de periodo n/2π.

Las funciones dadas son periódicas de periodo $\frac{2\pi}{\pi/4} = 8$ y $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$, respectivamente.

- $f(x) = 2sen\frac{\pi}{4}x$ corta al eje OX cuando x = 0 y x = 4. Al eje OY a la altura y = 0.
- $g(x) = sen\frac{\pi}{2}x$ corta al eje OX cuando x = 0, x = 2 y x = 4. Al eje OY a la altura y = 0.

Los posibles máximos y mínimos de la función se presentan en los puntos que anulan la derivada primera.

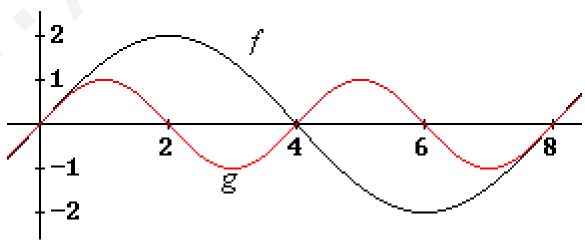
- $f(x) = 2sen\frac{\pi}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}x = 0 \Rightarrow$ x = 2

Como $f''(x) = -\frac{\pi^2}{8}sen\frac{\pi}{4}x$ es negativa en x = 2, para ese valor se obtiene un máximo.

- $g(x) = sen\frac{\pi}{2}x \Rightarrow g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x = 0 \Rightarrow$ x = 1 y x = 3.

Como $g''(x) = -\frac{\pi^2}{4}sen\frac{\pi}{2}x$ es negativa en x = 1 y pos1tiva en x = 3, para x = 1 se tiene un máximo, y para x = 3, un mínimo.

Un esbozo de ambas gráficas es el siguiente.



10. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente. (3,3 puntos).

Solución:
El punto en el que la curva tiene recta tangente con pendiente máxima (o mínima) es un punto de inflexión de la curva.

> (En efecto: la pendiente de la recta tangente a *f*(x) en un punto genérico x viene dada por el valor de $f\,'(x)$; para evitar confusiones escribiremos $g(x) = f'(x)$.
> El máximo de *g*(x) se obtiene en las soluciones de la ecuación $g'(x) = 0$ que hacen negativa a la función $g''(x)$. Por tanto en las soluciones de $g'(x) = f''(x) = 0$, que dan los posibles puntos de inflexión de *f*(x).)

Calculamos las tres primeras derivadas de la función:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow y''' = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

La derivada segunda se anula en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Como $y'''(-1/\sqrt{3}) < 0$ y $y'''(1/\sqrt{3}) > 0$ la curva tiene recta tangente con pendiente máxima en el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

El valor de esa pendiente es $y'(-1/\sqrt{3}) = \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}}$

11. Sea f la función dada por $f(x) = x^2 - 3|x| + 2, \quad x \in R.$

a) Estúdiese la derivabilidad de f en $x = 0$ mediante la definición de derivada.
b) Determínense los intervalos de monotonía de f y sus extremos relativos.
c) Esbócese la gráfica de f.

Solución:

a) Como $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, la función dada puede definirse así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & x < 0 \\ x^2 - 3x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Esta función está definida siempre y es continua para todo valor de x, incluido el 0, pues tanto por la izquierda como por la derecha de x = 0, f(x) $\to$ 2.

Para ver la derivabilidad en x = 0 estudiamos las derivadas laterales.

Por la izquierda:

$$f'(0^-) = \underset{h \to 0^-}{lím} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \underset{h \to 0^-}{lím} \frac{h^2 + 3h + 2 - 2}{h} = \underset{h \to 0^-}{lím} \frac{h(h+3)}{h} = 3$$

Por la derecha:

$$f'(0^+) = \underset{h \to 0^+}{lím} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \underset{h \to 0^+}{lím} \frac{h^2 - 3h + 2 - 2}{h} = \underset{h \to 0^+}{lím} \frac{h(h-3)}{h} = -3$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en x = 0.

b) Salvo en x = 0, la derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$$

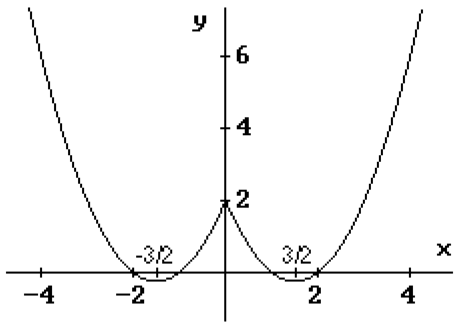
Esta derivada se anula en los puntos x = –3/2 y x = 3/2, por tanto se tiene:

- si x < –3/2, f'(x) < 0 $\Rightarrow$ f(x) es decreciente
- si –3/2 < x < 0, f'(x) > 0 $\Rightarrow$ f(x) es creciente

  La función tiene un mínimo en x = –3/2
- si 0 < x < 3/2, f'(x) < 0 $\Rightarrow$ f(x) es decreciente. (La función tiene un máximo en x = 0)
- si x > 3/2, f'(x) > 0 $\Rightarrow$ f(x) es creciente

  La función tiene un mínimo en x = 3/2

c) La gráfica de la función viene dada por dos trozos de parábolas, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ hasta x = 0 y $f(x) = x^2 - 3x + 2$, desde x = 0. Se obtiene la siguiente figura.



12. Dada la función $f(x)=x^x-2^x+x-1$ demuestra que existen α, β ∈ (1, 2) tales que $f(\alpha)=0$ y $f'(\beta)=3$.
Di qué teorema utilizas.

Solución:
La función dada es continua en el intervalo [1, 2]. Además cumple que:

$$f(1)=1-2+1-1=-1<0\,;\quad f(2)=4-4+2-1=1>0$$

Por tanto, por ele teorema de Bolzano, existe un punto α ∈ (1, 0) tal que $f(\alpha)=0$.

Hacemos $f'(x)$:

$$f'(x)=x^x(\ln x+1)-2^x\ln 2+1$$

Esta función también es continua en el intervalo [1, 2]. Además:

$$f'(1)=1(\ln 1+1)-2\ln 2+1=2(1-\ln 2)<3\,;\quad f'(2)=4(\ln 2+1)-4\ln 2+1=5$$

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función $f'(x)$ toma todos los valores comprendido entre $f'(1)$ y $f'(2)$. Luego existirá un valor β ∈ (1, 0) tal que $f'(\beta)=3$.

CNJ06

---

13. El consumo de un barco navegando a una velocidad de *x* nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x)=\dfrac{x^2}{60}+\dfrac{450}{x}$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente.

Solución:

El consumo es mínimo en las soluciones de C´(x) = 0 que hacen positiva a C´´(x).

$$C(x)=\frac{x^2}{60}+\frac{450}{x}\Rightarrow C'(x)=\frac{2x}{60}-\frac{450}{x^2}\Rightarrow C''(x)=\frac{2}{60}+\frac{900}{x^3}$$

$$C'(x)=\frac{2x}{60}-\frac{450}{x^2}=0\Rightarrow 2x^3-60\cdot 450=0\Rightarrow x^3=30\cdot 450\Rightarrow x=15\cdot 2^{2/3}$$

Como $C''(15\cdot 2^{2/3})=\dfrac{2}{60}+\dfrac{900}{30\cdot 450}$ > 0, para ese valor se obtiene el mínimo consumo.

Por tanto, la velocidad más económica es de $x=15\cdot 2^{2/3}$ ≈ 23,81 nudos.
El coste equivalente será: $C(15\cdot 2^{2/3})=\dfrac{15^2\cdot 2^{4/3}}{60}+\dfrac{450}{15\cdot 2^{2/3}}=\dfrac{45}{2^{2/3}}$ ≈ 28,35 u.m.