

Posiciones relativas entre rectas y planos

Observación: La mayoría de los problemas resueltos a continuación se han propuesto en los exámenes de Selectividad.

1. Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\pi_1: x + z = \lambda$$

$$\pi_2: 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$$

$$\pi_3: 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$$

Solución:

Para determinar la posición relativa de esos tres planos hay que estudiar el sistema que determinan:

$$\begin{cases} x + z = \lambda \\ 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{cases}$$

Cuando este sistema sea compatible determinado los planos se cortan en un único punto; si es compatible indeterminado los planos tienen, al menos, una recta en común; si es incompatible, los tres planos no tienen ningún punto en común.

Vamos a estudiar su compatibilidad. Para ello consideramos las matrices A y M, siendo A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} \lambda \\ \lambda + 2 \\ -\lambda \end{array} \right. = M$$

El determinante de A, $|A| = (\lambda - 2)(-\lambda - 6 - 2\lambda - 2) = (\lambda - 2)(-3\lambda - 8)$

Con esto:

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -8/3$ el $r(A) = 3 = r(M)$. En este caso el sistema es compatible determinado, y los tres planos se cortarán en un único punto, cuyas coordenadas vendrán dadas por la solución del sistema.

- Si $\lambda = 2$ se tiene: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right. = M$

En rango de A es 2, pues $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \neq 0$; pero el rango de M es 3, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix} = -56. \text{ Por tanto, si } \lambda = 2 \text{ el sistema será incompatible y los planos no tendrán}$$

ningún punto en común. Observando los vectores normales de π_1 y π_2 se ve que ambos planos son paralelos.

- Si $\lambda = -8/3$ se tendrá: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -14/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} -8/3 \\ -2/3 \\ 8/3 \end{array} \right. = M$

En rango de A sigue siendo 2, pues $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14/3 \end{vmatrix} \neq 0$. El rango de M es 3, pues el menor

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8/3 \\ -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -10/3 & 8/3 \end{vmatrix} = -\frac{112}{27}. \text{ Por tanto, si } \lambda = -8/3 \text{ el sistema sigue siendo incompatible}$$

y los planos no tendrán ningún punto en común. En este caso, como los vectores normales de π_1 y π_3 son proporcionales, dichos planos son paralelos.

2. a) ¿En qué posición relativa pueden estar tres planos en el espacio que no tienen ningún punto en común?

b) Determine la posición relativa de los planos:

$$\pi: x - 2y + 3z = 4, \sigma: 2x + y + z + 1 = 0 \text{ y } \rho: -2x + 4y - 6z = 0$$

Solución:

a) Pueden ser paralelos, dos de ellos o los tres; también pueden estar como las caras de un prisma triangular.

a) Hay que estudiar la compatibilidad del sistema asociado.

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + z = -1 \\ -2x + 4y - 6z = 0 \end{array} \right\}$$

Formamos la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right) = M$$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \text{ y el menor } M_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 40 \neq 0,$$

se tiene que $r(A) = 2$ y $r(M) = 3$.

En consecuencia, el sistema no tiene solución; o lo que es lo mismo, los tres planos no tienen ningún punto en común.

3. Dados los planos $\pi_1: x + y + z = -5$, $\pi_2: x - 3y - z = 3$ y la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$, se

pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2 .

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralela a r .

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta s vienen dadas por la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -5 - y \\ x - z = 3 + 3y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene: $2x = -2 + 2y \Rightarrow x = -1 + y$

Restándolas se tiene: $2z = -8 - 4y \Rightarrow z = -4 - 2y$.

Haciendo $y = t$ obtenemos las ecuaciones: $s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$

La posición relativa de las rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores:

$$\vec{v}_r = (2, 3, 2), \vec{v}_s = (1, 1, -2) \text{ y } \mathbf{RS} = (-1, 0, -4) - (2, 1, 0) = (-3, -1, -4)$$

donde R es un punto de r y S un punto de s .

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 22$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las

rectas r y s se cruzan.

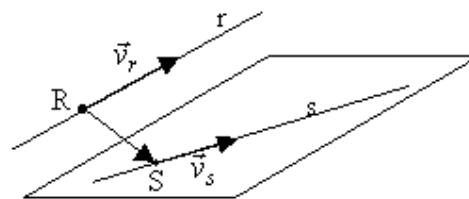
b) El plano pedido vendrá determinado por la

recta s y por el vector $\vec{v}_r = (2, 3, 2)$. Su

ecuación será:

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + t + 2h \\ y = t + 3h \\ z = -4 - 2t + 2h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 3 \\ z+4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 8x - 6y + z + 12 = 0$$



4. Sea m un número real y sean r y π la recta y el plano dados respectivamente por

$$r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \quad \pi \equiv 3x + 2z = 2 - m.$$

a) Estúdiense la posición relativa de r y π en función del valor de m .

b) Para el valor $m = 1$, hállese la ecuación del plano que pasa por el punto de corte de r y π y es perpendicular a la recta $t \equiv x = y = z$.

Solución:

a) Hay que discutir el sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la del plano:

$$\begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 2 - m \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m$.

Por tanto:

- si $m \neq 2$, su valor es distinto de 0 \Rightarrow el rango de la matriz de coeficientes es 3 \Rightarrow el sistema es compatible determinado \Rightarrow el plano y la recta se cortan en un único punto.

- si $m = 2$, se tiene un sistema homogéneo, $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$, con infinitas soluciones, pues

el rango de la matriz de coeficientes es 2 \Rightarrow la recta está contenida en el plano.

b) Si $m = 1$, se tiene el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$.

Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 - 1 - 2}{1} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1 + 1 + 1}{1} = 0;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 + 1 - 6}{1} = -1$$

Por tanto, el punto de corte es $P = (1, 0, -1)$

El plano pedido, por ser perpendicular a la recta t , tiene como vector normal $(1, 1, 1)$. Luego, por pasar por P , tendrá como ecuación:

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z + 1) = 0 \Rightarrow x + y + z = 0.$$

5. Comprobar que las rectas

$r: (x, y, z) = (3, -4, 0) + a(2, -3, -2)$ $s: (x, y, z) = (-7, 1, 2) + b(4, -1, 0)$
se cortan en un punto. Encontrar también la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

Las rectas se cortarán si los vectores $\vec{v}_r = (2, -3, -2)$, $\vec{v}_s = (4, -1, 0)$ y **RS** son linealmente dependientes, siendo R un punto de r y S un punto de s .

Tomamos $R = (3, -4, 0)$ y $S = (-7, 1, 2) \Rightarrow \mathbf{RS} = (-10, 5, 2)$.

Como,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 20 = 0$$

los vectores son linealmente dependientes. Luego, las rectas se cortan.

El punto de corte se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3 + 2a = -7 + 4b \\ -4 - 3a = 1 - b \\ -2a = 2 \end{cases} \quad (\text{sistema que se obtiene igualando las coordenadas de una y otra}$$

recta).

Su solución es $a = -1$ y $b = 2$.

Luego, el punto de corte es: $P = (1, -1, 2)$

Las ecuaciones del plano que determinan son:

$$\begin{cases} x = 1 + 2a + 4b \\ y = -1 - 3a - b \\ z = 2 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 4 \\ y+1 & -3 & -1 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4y - 5z + 13 = 0.$$

6. Determina para qué valor del parámetro a el plano $\pi: ax + 2y + z = a$ es paralelo a la recta

$$r: \begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$$

Solución:

El vector normal al plano $\vec{v}_\pi = (a, 2, 1)$ debe ser perpendicular al de dirección de la recta,

$$\vec{v}_r = (1, -a, 1) \times (a, 0, 1) = (-a, -1 + a, a^2).$$

Por tanto:

$$\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (a, 2, 1) \cdot (-a, -1 + a, a^2) = 0 \Rightarrow -2 + 2a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

7. Una recta pasa por el punto $(1, -1, 0)$ y es paralela a los planos

$$x + y = 1, \quad x + z = 1.$$

Halla sus ecuaciones.

Solución:

Si la recta es paralela a los planos, debe ser perpendicular a los vectores directores de ambos planos: $\vec{v}_{\pi_1} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_{\pi_2} = (1, 0, 1)$. Por tanto, su dirección vendrá dada por el producto vectorial de esos vectores: $\vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2}$

$$\vec{v}_{\pi_1} \times \vec{v}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Como debe pasar por el punto $(1, -1, 0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases}$$

8. Sea r la recta intersección de los planos

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

- Determinar el plano π que contiene a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas.
- Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el punto $(1, 0, 1)$.

Solución:

a) El haz de planos determinado por r es

$$x + 2y - z - 3 + m(2x - y + z - 1) = 0$$

Si se quiere el plano que pasa por el origen: $-3 - m = 0 \Rightarrow m = -3$.

Luego, el plano π será:

$$\pi: x + 2y - z - 3 - 3(2x - y + z - 1) = 0 \Leftrightarrow -5x + 5y - 4z = 0$$

b) El vector de dirección de la recta s perpendicular a π es el normal del plano: $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi$.

Su ecuación es:

$$s: \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 5t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

9. Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$ y $D(\alpha, 3, 1)$.

Calcula:

- El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C.
- La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C.
- El valor de α para que el vector AD sea perpendicular al plano π anterior.
- Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π .

Solución:

a) El área del triángulo de vértices A, B, C viene dada por $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Como $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 6) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 6)$, se tiene que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12, 18, 6)$$

$$\text{Luego, } S = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \sqrt{504} = 3\sqrt{14}$$

b) El plano está determinado por el punto A y los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} anteriores. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x + 3y + z - 6 = 0$$

c) El vector \overrightarrow{AD} será perpendicular al plano cuando \overrightarrow{AD} sea paralelo al vector normal del plano, $\vec{v}_\pi = (2, 3, 1)$; siendo $\overrightarrow{AD} = (\alpha, 3, 1) - (3, 0, 0) = (\alpha - 3, 3, 1)$.

Por tanto:

$$\overrightarrow{AD} = k \vec{v}_\pi \Rightarrow (\alpha - 3, 3, 1) = k \cdot (2, 3, 1) \Rightarrow \alpha - 3 = 2, \text{ (pues } k = 1) \Rightarrow \alpha = 5.$$

d) Sea $D'(a, b, c)$ el punto buscado. Debe cumplir:

- El vector $\overrightarrow{DD'}$ debe ser paralelo al normal del plano $\vec{v}_\pi = (2, 3, 1)$
- El punto medio (M) del segmento DD' debe pertenecer al plano.

Por tanto:

$$\overrightarrow{DD'} = (a - 5, b - 3, c - 1) = k(2, 3, 1) \Rightarrow a - 5 = 2k; b - 3 = 3k; c - 1 = k$$
$$\Rightarrow a = 5 + 2k; b = 3 + 3k; c = 1 + k \quad [1]$$

$$M = \left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+3}{2}, \frac{c+1}{2} \right) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot \frac{a+5}{2} + 3 \cdot \frac{b+3}{2} + \frac{c+1}{2} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + 3b + c + 8 = 0 \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2]:

$$14k + 28 = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow a = 1; b = -3; c = -1.$$

El punto simétrico buscado es $D'(1, -3, -1)$.

10. a) Comprobar que las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 0, -1) \quad s \equiv (x, y, z) = (0, 3, 1) + \mu(-2, 1, 3)$$

se cortan en un punto.

b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior.

Solución:

a) Dos rectas se cortan en un punto cuando no son paralelas y están en el mismo plano.

Como sus vectores de dirección son $\vec{v}_r = (1, 0, -1)$ y $\vec{v}_s = (-2, 1, 3)$ resulta evidente que no son paralelas.

Estarán en el mismo plano si los vectores \vec{v}_r , \vec{v}_s y \mathbf{RS} son coplanarios, siendo R un punto de r y S otro punto de s:

$$\mathbf{RS} = (0, 3, 1) - (1, 2, -1) = (-1, 1, 2).$$

Como
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0,$$
 los vectores son linealmente dependientes. Luego,

efectivamente, los vectores son coplanarios. En consecuencia, las rectas r y s se cortan.

b) El plano que determinan viene dado por el punto R y los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s . Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -1(x-1) + 1(y-2) - 1(z+1) = 0 \Rightarrow x - y + z + 2 = 0$$

11. Se consideran los puntos A = (3, 0, 0), B = (0, 2, 0) y C = (0, 0, 1). Se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π que los contienen.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el origen de coordenadas. Hallar también el punto de intersección de la recta con el plano.

Solución:

a) El plano viene determinado por cualquiera de los puntos, por ejemplo A, y por los vectores $\mathbf{AB} = (0, 2, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 2, 0)$ y $\mathbf{AC} = (0, 0, 1) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 1)$.

Sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t - 3h \\ y = 2t \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

b) El vector de dirección de la recta es el normal del plano $v_\pi = (2, 3, 6)$.

Sus ecuaciones paramétricas son:
$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$$

El punto de corte de la recta y el plano se obtiene resolviendo el sistema que determinan. Para ello sustituimos los valores de la recta en la ecuación del plano. Así:

$$2 \cdot (2\lambda) + 3 \cdot (3\lambda) + 6 \cdot (6\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow 49\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 6/49$$

La recta y el plano se cortan si $\lambda = 6/49$. Se obtiene el punto P = (12/49, 18/49, 36/49).

12. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano

$\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de recta s son: $s \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Sustituyendo en π se obtiene el punto P de corte:

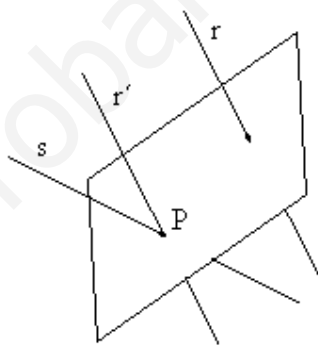
$$3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow P = (-9, -1, -4)$$

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{cases}$

siendo $\vec{v}_r = (1, -3, -13)$

Por tanto, la recta r' , paralela a r y que pasa por P , es:

$$r' \equiv \begin{cases} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{cases}$$



13. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano

$x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta dada son: $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

El plano pedido está determinado por el punto $A = (1, 0, -1)$ y por los vectores

$\vec{v}_\pi = (1, -1, 2)$ y $\vec{v}_r = (2, 1, 0)$.

Su ecuación será:

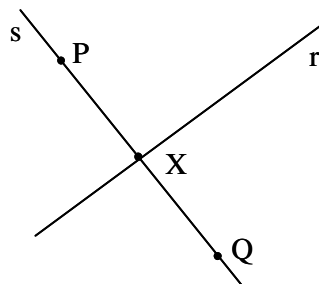
$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -1 & 1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 4y + 3z + 5 = 0.$$

14. Dada la recta r de ecuación $x+1 = y-2 = \frac{z-3}{4}$ y el punto $P(1, 2, 1)$, calcula:

- la ecuación de la recta que pasa por P , es perpendicular a r y se apoya en r .
- las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de r .

Solución:

La situación es la siguiente:



a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Sea $X = (-1 + t, 2 + t, 3 + 4t)$ un punto genérico de r .

El vector \mathbf{PX} , de dirección de la recta s , perpendicular a r , es:

$$\mathbf{PX} = (-1 + t, 2 + t, 3 + 4t) - (1, 2, 1) = (-2 + t, t, 2 + 4t)$$

Ese vector debe ser perpendicular a $\vec{v}_r = (1, 1, 4)$. Por tanto:

$$(-2 + t, t, 2 + 4t) \cdot (1, 1, 4) = 0 \Rightarrow -2 + t + t + 8 + 16t = 0 \Rightarrow t = -1/3$$

Luego, $X = (-4/3, 5/3, 5/3)$ y $\mathbf{PX} = (-7/3, -1/3, 2/3) = (-7, -1, 2)$.

La recta pedida es $s: \begin{cases} x = 1 - 7\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

b) Sea $Q = (a, b, c)$. Como $X = (-4/3, 5/3, 5/3)$ es el punto medio entre P y Q , se cumple que:

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+1}{2} \right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right) \Rightarrow a = -\frac{11}{3}, b = \frac{4}{3}, c = \frac{7}{3}$$

Por tanto, $Q = \left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right)$.

15. De los planos paralelos al plano $x + y + z = 8$, encontrar el que determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $8\sqrt{3}$.

Solución:

Los planos paralelos son $x + y + z = k$. Esos planos cortan a los ejes en los puntos:

$$A = (k, 0, 0), B = (0, k, 0) \text{ y } C = (0, 0, k).$$

La superficie del triángulo de vértices ABC es:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \text{ siendo } \overrightarrow{AB} = (-k, k, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-k, 0, k).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -k & k & 0 \\ -k & 0 & k \end{vmatrix} = (k^2, k^2, k^2)$$

Luego,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{k^4 + k^4 + k^4} = \frac{k^2 \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \Rightarrow k = -4 \text{ o } k = 4.$$

Los planos pedidos son: $x + y + z = -4$, $x + y + z = 4$

16. Encuentre el plano que contiene a la recta:

$$L \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

y es paralelo a la recta determinada por los puntos: P(1, 1, 1) y Q(-1, 0, 2).

Solución:

El plano pedido está definido por el punto A = (1, 2, 3) de la recta L, por el vector de dirección de L, $\vec{v}_L = (-1, 1, 0)$, y por el vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (-2, -1, 1)$.

Sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 - t - 2h \\ y = 2 + t - h \\ z = 3 + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + 3z - 12 = 0.$$

17. Dados los puntos del espacio $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 3)$.

a) Determina la ecuación del plano π que los contiene.

b) Calcula la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el origen.

[2 puntos]

Solución:

a) La ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-2) + 6y + 2z = 0 \Rightarrow 3x + 6y + 2z - 6 = 0$$

b) Como el vector $(3, 6, 2)$ es normal al plano, la recta pedida es:

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t \\ z = 2t \end{cases}$$

18. Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

Solución:

Para que las rectas se corten, el sistema formado por las cuatro ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = k \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

debe ser compatible.

En consecuencia,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1$$

Para $k = 1$, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ -2z = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 1; y = 4; x = -2$$

El punto de corte es $P = (-2, 4, 1)$.

19. Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = -3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$.

Se pide:

- Determinar el punto P de intersección de r y π , y el punto Q en que la recta r corta al eje OZ.
- Determinar el punto R que es simétrico de Q respecto de π y la ecuación de la recta simétrica de r respecto del plano π .

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano: $2t + t - (3 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$.

Luego, el punto $P = (1, 1, 4)$.

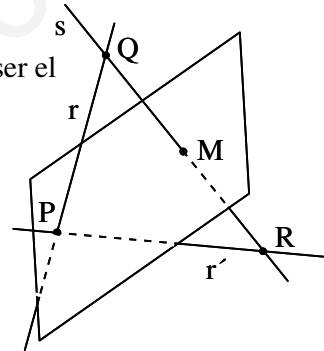
Los puntos del eje OZ son de la forma $(0, 0, z) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow Q = (0, 0, 3)$.

b) Sea $R = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de Q respecto de π .

Ambos puntos Q y R estarán en la recta s , perpendicular a π por Q.

Además, si M es el punto de corte de esa recta y el plano, M debe ser el punto medio entre Q y R.

Como $\vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$, se deduce que $s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$



Corte de recta y plano: $4\lambda + \lambda - 3 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/3$.

Por tanto, $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Punto medio de Q y R: $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right)$

Como $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow x_0 = \frac{4}{3}, y_0 = \frac{2}{3}, z_0 = \frac{7}{3}$

Luego, el punto simétrico es $R = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

- La recta r' , simétrica de r respecto de π , es la determinada por los puntos P y R. Como

$\overline{PR} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}\right) \equiv (1, -1, -5)$, su ecuación será: $r': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$