Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Posiciones relativas Problemas Resueltos

Ecuaciones de rectas y planos

1. Halla, en sus diferentes formas, las ecuaciones de la recta definida por el punto $A(2, -1, 1)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.
¿Pertenecen los puntos $P(3, -1, -1)$ y $Q(0, 2, 5)$ a la recta obtenida?
Solución:
Vectorial: $r: (x, y, z) = (2, -1, 1) + \lambda(-1, 0, 2)$.

Paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$. Continua: $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación.

El punto $P(3, -1, -1) \in r$, pues: $\begin{cases} 3 = 2 - \lambda \\ -1 = -1 \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases}$ se cumple para $\lambda = -1$.

El punto $Q(0, 2, 5) \notin r$, pues, en este caso, la segunda coordenada siempre debe valer -1.

2. Halla las ecuaciones de la recta s que pasa por los puntos $A(1, 3, -4)$ y $B(3, -5, -2)$.
Solución:
La recta s viene determinada por el punto $A(1, 3, -4)$ y por el vector
$\boldsymbol{AB} = (3, -5, -2) - (1, 3, -4) = (2, -8, 2) \equiv (1, -4, 1)$

Su ecuación vectorial es: $s \equiv (x, y, z) = (1, 3, -4) + h(1, -4, 1)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3 - 4h \\ z = -4 + h \end{cases}$.

En forma continua: $s \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+4}{1}$.

3. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ y $C = (1, -1, 0)$.
Solución:
Un plano queda determinado por un punto y dos vectores. El punto puede ser cualquiera de los dados, por ejemplo A; los vectores, $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$. En este caso:
$\boldsymbol{AB} = (2, 2, 2) - (1, 0, 1) = (1, 2, 1)$; $\boldsymbol{AC} = (1, -1, 0) - (1, 0, 1) = (0, -1, -1)$.
Su ecuación será:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -(x-1) + y - (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: x - y + z - 2 = 0.$$

4. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(1, 4, 3)$. ¿Pertenecen los puntos $P(-1, 2, -3)$ y $Q(0, 4, 3)$ al plano obtenido?

Solución:

El plano queda determinado por el punto A (o el B o el C) y por los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$.

$\boldsymbol{AB} = (2, 0, 1) - (1, 3, 2) = (1, -3, -1)$; $\boldsymbol{AC} = (1, 4, 3) - (1, 3, 2) = (0, 1, 1)$.

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3-3\lambda+\mu \\ z = 2-\lambda+\mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-3 & -3 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv 2x+y-z-3=0.$$

Un punto pertenece a un plano cuando cumple su ecuación. Por tanto:

$P(-1, 2, -3) \in \pi$, pues $2 \cdot (-1) + 2 - (-3) - 3 = 0$;

$Q(0, 4, 3) \notin \pi$, pues $2 \cdot 0 + 4 - 3 - 3 \neq 0$.

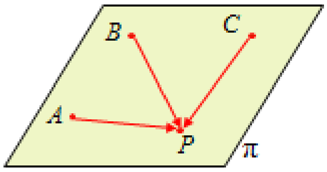
5. Calcula b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ determinen un plano que contenga al punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

Solución:

Si el punto $P(2, 0, 1)$ pertenece al plano determinado por A, B y C, entonces los vectores $\boldsymbol{AP}$, $\boldsymbol{BP}$ y $\boldsymbol{CP}$ deben ser coplanarios y, en consecuencia, dar lugar a un determinante nulo.

Como $\boldsymbol{AP} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{BP} = (0, -2, 1-b)$ y $\boldsymbol{CP} = (1, 0, 1)$, se tendrá que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1-b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3+b=0 \Rightarrow b=3.$$



Luego, el valor pedido es $b = 3$.

Por tanto, los puntos son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 3)$ y $C(1, 0, 0)$; y el plano que determinan:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x+y-z-1=0.$$

6. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1, -1, 1)$ y tiene por vector normal a $\vec{v} = (1, -2, -1)$.

Halla otro punto P del plano y comprueba que el vector $\boldsymbol{AP}$ es perpendicular a $\vec{v}$.

Solución:

Un vector normal del plano $\pi: ax+by+cz+d=0$ es $\vec{v}_\pi = (a, b, c)$.

Por tanto, la ecuación del plano pedido será: $\pi: x-2y-z+d=0$.

Como debe contener al punto $A \Rightarrow 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$.

El plano es: $\pi: x-2y-z=0$.

Otro punto P del plano puede ser $P(1, 0, 1)$; de donde $\boldsymbol{AP} = (1, 0, 1) - (-1, -1, 1) = (2, 1, 0)$.

El producto escalar $\boldsymbol{AP} \cdot \vec{v} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, -1) = 2 - 2 = 0$. Luego ambos vectores son perpendiculares.

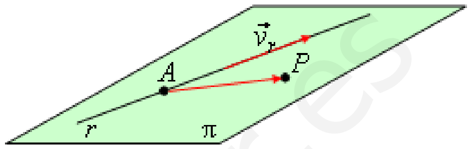
7. Halla las ecuaciones del plano que contiene al punto *P*(5, 0, –1) y a la recta $r: \begin{cases} x = \quad -\lambda \\ y = -4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

<u>Solución</u>:
El plano pedido viene determinado por el punto *P* y por los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, y ***PA*** (o ***AP***), siendo *A* un punto de *r*.

$\vec{v}_r$ = (–1, 0, 1); *A* = (0, –4, 2); ***PA*** = (0, –4, 2) – (5, 0, –1) = (–5, –4, 3)

Las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$\pi: \begin{cases} x = 5 - \lambda - 5\mu \\ y = \qquad -4\mu \\ z = -1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$



Su ecuación general:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -5 \\ y & 0 & -4 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: 4(x-5) - 2y + 4(z+1) = 0 \Rightarrow \pi:\ 2x - y + 2z - 8 = 0.$$

8. Halla la ecuación del plano que contiene al punto *P*(1, 1, 1) y a la recta

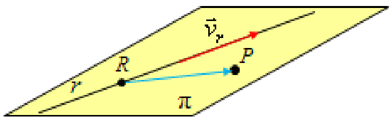
$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

<u>Solución:</u>
El plano pedido viene determinado por el punto *P*(1, 1, 1) y los vectores $\vec{v}_r$ y ***RP***, siendo *R*(3, 1, –1) ∈ *r*.

Luego: $\vec{v}_r$ = (3, 2, –2); ***RP*** = (1, 1, 1) – (3, 1, –1) = (–2, 0, 2).

La ecuación del plano pedido es:

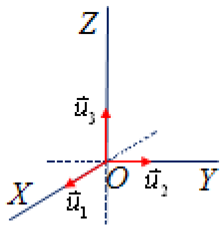
$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & 0 \\ z-1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0.$$



9. Obtén las ecuaciones de las rectas que determinan los ejes cartesianos.

<u>Solución</u>:
El eje *OX* pasa por origen, *O*(0, 0, 0) y lleva la dirección del vector $\vec{u}_1$ = (1, 0, 0). Su ecuación será: $r_{OX}: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) \rightarrow$

$$\rightarrow \text{en paramétricas: } r_{OX}: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_{OX}: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$



El eje *OY* pasa por origen, *O*(0, 0, 0) y lleva la dirección del vector $\vec{u}_2$ = (0, 1, 0). Su ecuación será: $r_{OY}: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) \Leftrightarrow r_{OY}: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r_{OY}: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

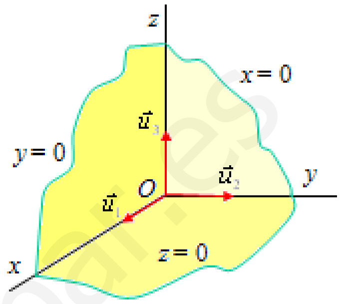
El eje OZ pasa por origen, $O(0, 0, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$. Su ecuación será: $r_{OZ} : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 0, 1) \Leftrightarrow r_{OZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow r_{OZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

10. Obtén las ecuaciones de los planos cartesianos.

Solución:

El plano XOY contiene al pasa por origen está determinado por los vectores $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ y $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$. Su ecuación será:

$$\pi_{XOY} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \quad \mu \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0.$$



De manera análoga, el plano XOZ será $y = 0$.

Y el plano YOZ tendrá por ecuación $x = 0$.

Observación: Como puede verse, la recta que contiene al eje OX es el corte de los planos $y = 0$ y $z = 0$. Naturalmente, su ecuación es: $r_{OX} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Otras formas de determinación de planos y rectas

11. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos de ecuaciones:

$$2x - 2y - z = 9 \quad \text{y} \quad 4x - y + z = 42$$

Indica uno de sus puntos y su vector de dirección.

Solución:

La recta r es, $r : \begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} -2y - z = 9 - 2x \\ -y + z = 42 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} x = \quad p \\ y = -17 + 2p \\ z = 25 - 2p \end{cases}$.

Un punto de la recta es $P(0, -17, 25)$. Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (1, 2, -2)$.

12. (Propuesto en Selectividad en 2011, Aragón)

Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}, \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$.

Solución:

El plano pedido viene determinado por el punto A y por los vectores directores de las rectas dadas.

Para la recta r se tiene $\vec{v}_r = (-1, 1, 2)$.

Obsérvese que $r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Si se expresa la recta s en su forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ -x + y = 1 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = -2 - z \\ x = -1 - 4z \end{cases} \Leftrightarrow$$

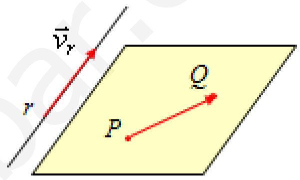
$$\Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -7t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (-4, -7, 1).$$

La ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - h - 4t \\ y = 1 + h - 7t \\ z = 2 + 2h + t \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 1 & -7 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0.$$

13. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(0, 1, 1)$ y Q $(1, 0, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{2}$.

Solución:



El plano pedido viene determinado por uno de los puntos dados y por los vectores ***PQ*** y $\vec{v}_r$, de dirección de la recta. Esto es, por:

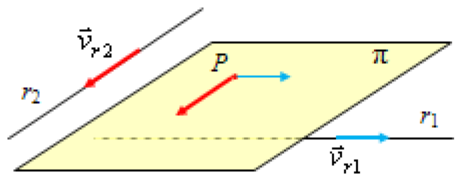
$P(0, 1, 1)$; ***PQ*** = (1, 0, 1) – (0, 1, 1) = (1, –1, 0); $\vec{v}_r$ = (1, 0, 2)

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv -2x - 2(y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas r_1 y r_2, de ecuaciones: $r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}$; $r_2 \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$.

Solución:



El plano pedido viene determinado por el punto dado y por los vectores de dirección de cada una de las rectas.

Esos vectores son: $\vec{v}_{r1}$ = (2, 1, –3); $\vec{v}_{r2}$ = (1, 2, –3).

Por tanto:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t + h \\ y = -1 + t + 2h \\ z = 4 - 3t - 3h \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z-4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

15. Dada la recta la recta $r: \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$, calcula:

a) Un vector director de la recta r.

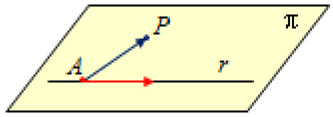
b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A.

Solución:

a) Se expresa r en función de sus ecuaciones paramétricas.

$$r: \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + y \\ z = -1 + y \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1).$$

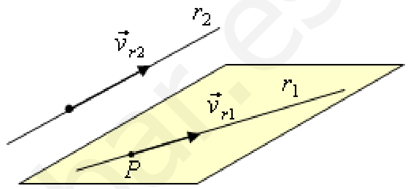
b) El plano π viene determinado por el punto $P(-1, 0, -1)$, el vector $\vec{v}_r$ y el vector $\boldsymbol{AP} = (-1, 0, -1) - (1, 1, 1) = (-2, -1, -2)$.
Su ecuación es:



$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x - z = 0.$$

16. Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta $r_1: \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$ y es paralelo a la recta $r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

<u>Solución:</u>



El plano pedido viene determinado por un punto cualquiera, $P \in r_1$, y por los vectores $\vec{v}_{r1}$ y $\vec{v}_{r2}$, de dirección de las rectas r_1 y r_2, respectivamente.
Para obtener el punto y los vectores se expresan ambas rectas en su forma paramétrica.

$$r_1: \frac{x-1}{2} = y = 2 - z \to r_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \to$$

$$\to P = (1, 0, 2);\ \vec{v}_{r1} = (2, 1, -1)$$

$$r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow r_2: \begin{cases} x - y = z \\ x - 2y = -z \end{cases} \to \text{Restando ambas ecuaciones: } E1 - E2:$$

$$\Rightarrow r_2: \begin{cases} x - y = z \\ y = 2z \end{cases} \to (\text{haciendo } z = h) \Rightarrow r_2: \begin{cases} x = 3h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases} \to \vec{v}_{r2} = (3, 2, 1).$$

Por tanto, el plano pedido es:

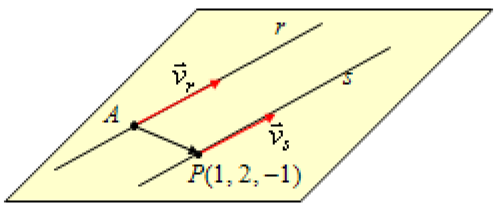
$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2t + 3h \\ y = \quad t + 2h \\ z = 2 - t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y & 1 & 2 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) - 5y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi: 3x - 5y + z - 5 = 0.$$

17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela a

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$$

Halla también la ecuación del plano que contenga a ambas rectas.
<u>Solución</u>:



La recta pedida difiere de la dada sólo en su posición. Su ecuación será:

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

El plano viene determinado por el punto $A(1, 3, 0) \in r$ y por los vectores $\vec{v}_r = (2, 2, -1)$ y $\boldsymbol{AP} = (1, 2, -1) - (1, 3, 0) = (0, -1, -1)$.

Su ecuación será:

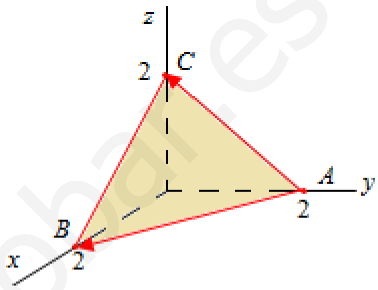
$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi: -3x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

Otros problemas (I)

18. Dibuja el triángulo de vértices los puntos $A(0, 2, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 0, 2)$. Halla la ecuación del plano que lo contiene.

Solución:

Los puntos dados se encuentran en los ejes cartesianos, como se indica en la figura adjunta.



Dos de los vectores que determinan este plano son:

AB = (2, –2, 0) y ***AC*** = (0, –2, 2).

Luego, su ecuación será:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -4x - 4(y-2) - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0.$$

19. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla la Mancha)

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

Solución:

El plano corta a los ejes en los puntos: $A(-3, 0, 0)$; $B(0, 3, 0)$; $C(0, 0, -1)$

El área del triángulo viene dada por: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Los vectores ***AB*** y ***AC*** son:

AB = (0, 3, 0) – (–3, 0, 0) = (3, 3, 0); ***AC*** = (0, 0, –1) – (–3, 0, 0) = (3, 0, –1).

Luego:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(-3,\ 3,\ 9)\right| \to S = \frac{1}{2}\sqrt{9+9+81} = \frac{9}{2}\sqrt{11}\ \text{u}^2.$$

20. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Calcula:

a) El área del triángulo ABC.

b) El perímetro del triángulo ABC.

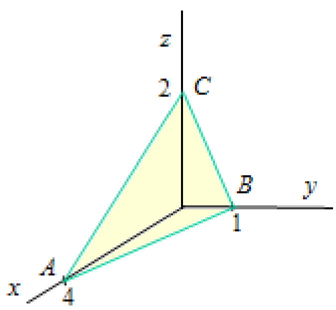
c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC.

Solución:

El punto A se obtiene haciendo $y = z = 0$ y despejando en la ecuación del plano; se tiene $x = 4$. Por tanto, $A = (4, 0, 0)$

De manera análoga, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 2)$.

La idea se indica en el dibujo adjunto.



a) El área del triángulo *ABC* viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

En este caso:

AB = (0, 1, 0) – (4, 0, 0) = (–4, 1, 0); **AC** = (0, 0, 2) – (4, 0, 0) = (–4, 0, 2)

Luego,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 8, 4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{84} \text{ y } S = \frac{\sqrt{84}}{2} = \sqrt{21}.$$

b) El perímetro del triángulo es la suma de los módulos de los vectores que determinan sus lados.

$$p = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} + \sqrt{(-4)^2 + 2^2} + \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5}.$$

El vector **BC** = (0, 0, 2) – (0, 1, 0) = (0, –1, 2).

c) El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

En este caso:

Ángulo *A*: $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{(-4, 1, 0) \cdot (-4, 0, 2)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{340}} \to \hat{A} = 29{,}81^{\circ}$.

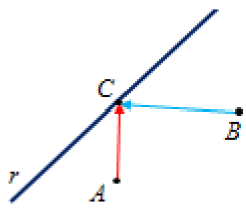
Ángulo *B*: $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{(4, -1, 0) \cdot (0, -1, 2)}{\sqrt{4^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \to \hat{B} = 83{,}77^{\circ}$.

Ángulo *C*: $\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{(4, 0, -2) \cdot (0, 1, -2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{10} \to \hat{C} = 66{,}42^{\circ}$.

21. Dados los puntos *A*(1, 1, 0) y *B*(0, 0, 2) y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, halla un punto $C \in r$ de forma que el triángulo *ABC* sea rectángulo con el ángulo recto en *C*.

<u>Solución:</u>

La situación es la representada en la figura adjunta.



El triángulo *ABC* será rectángulo en *C* cuando los vectores **AC** y **BC** sean perpendiculares. Para ello: **AC · BC** = 0

El punto *C* de la recta es de la forma: *C* = (1, 1 + λ, 1 + λ). Por tanto:

AC = (0, λ, 1 + λ), **BC** = (1, 1 + λ, –1 + λ)

Luego,

AC · **BC** = 2λ² + λ – 1 = 0 ⇒ λ = 1/2 o λ = –1.

Se obtienen dos soluciones paca *C*:

Si λ = 1/2, *C* = (1, 3/2, 3/2); y si λ = –1, *C* = (1, 0, 0).

Posiciones relativas de dos y tres planos

22. Halla la posición relativa de los pares de planos siguientes. Si se cortan, halla la ecuación de la recta que determinan.

a) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv x - 3y - z = 0$.

b) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv -2x - y + z - 2 = 0$.

c) $\pi \equiv x - 3y + 2z - 1 = 0$ y $\alpha \equiv 2x - 6y + 4z - 2 = 0$

Solución:

a) Como los vectores normales de ambos planos son distintos (no dependientes), los planos se cortan: $\vec{v}_\pi = (2, \quad 1, \quad -1)$; $\vec{v}_\alpha = (1, \quad -3, \quad -1)$.

La recta que determinan es:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} 2x - z = -1 - y \\ x - z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow r: \overset{E1-E2}{} \begin{cases} x = -1 - 4y \\ x - z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r: \begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = \quad t \\ z = -1 - 7t \end{cases}.$$

Un punto de la recta es $P(-1, 0, -1)$. Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (-4, 1, -7)$.

b) Los vectores normales de ambos planos son "iguales" (dependientes): $\vec{v}_\pi = (2, \quad 1, \quad -1)$; $\vec{v}_\alpha = (-2, \quad -1, \quad 1)$. Por tanto, los planos son paralelos o iguales. Serán iguales cuando cualquier punto de π, por ejemplo $P(0, 0, 1)$, pertenezca a α. Como no es así, los planos son paralelos.

c) Como resulta evidente, la ecuación del segundo plano se obtiene multiplicando por 2 la primera. Por tanto, ambos planos coinciden: son el mismo plano.

23. Dados los planos de ecuación:

$$\pi_1 \equiv 2x + ky - z = 1 \text{ y } \pi_2 \equiv x - 3y - k^2 z = k$$

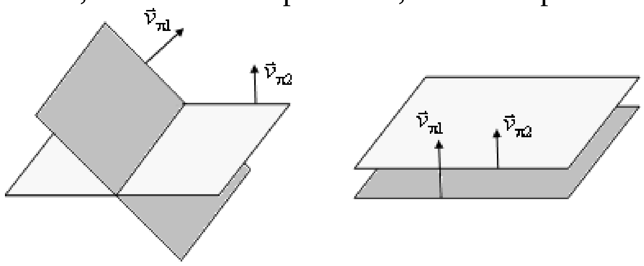
a) Estudia, en función del parámetro k, su posición relativa.

b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

Solución:

a) Dos planos pueden cortarse, coincidir o ser paralelos.

- Se cortan cuando sus vectores normales son independientes.
- Son paralelos cuando sus vectores normales son dependientes: $\vec{v}_{\pi 1} = p\,\vec{v}_{\pi 2}$
- Son coincidentes cuando, además de ser paralelos, tienen un punto en común.



Los vectores normales son: $\vec{v}_{\pi 1} = (2, \quad k, \quad -1)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (1, \quad -3, \quad -k^2)$.

Esos vectores son linealmente dependientes si sus coordenadas son proporcionales; esto es, si $\frac{2}{1} = \frac{k}{-3} = \frac{-1}{-k^2}$.

No hay ningún valor de k que cumpla esa relación, pues:

de $\frac{3}{1} = \frac{k}{-2} \Rightarrow k = -6$; y de $\frac{2}{1} = \frac{-1}{-k^2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En consecuencia, los planos dados se cortan para cualquier valor de k.

b) Los planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales: Para ello, su producto escalar debe ser cero: $\vec{v}_{\pi 1} \cdot \vec{v}_{\pi 2} = 0$.

$$\vec{v}_{\pi 1} \cdot \vec{v}_{\pi 2} = (2, k, -1) \cdot (1, -3, -k^2) = 2 - 3k + k^2 = 0 \Rightarrow k = 1,\ k = 2$$

Los planos son perpendiculares cuando $k = 1$ o $k = 2$.

24. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 2$; $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 3$; $\pi_3 \equiv x - 2y - z = -1$.

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:

Hay que estudiar el sistema que determinan: $\begin{cases} \pi_1 : 2x + y - z = 2 \\ \pi_2 : x + 2y - z = 3 \\ \pi_3 : x - 2y - z = -1 \end{cases} \to$ (Por Gauss) $\to$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1 - E3 \\ E2 - E3 \\ \ \end{matrix} \begin{cases} x + 3y \quad = 3 \\ \quad 4y \quad = 4 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 1;\ x = 0;\ z = -1.$$

Los planos se cortan en el punto de coordenadas (0, 1, –1).

25. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$\pi_1 \equiv x + 10y - 5z = 11$; $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 3$; $\pi_3 \equiv x - 2y + z = -1$.

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:

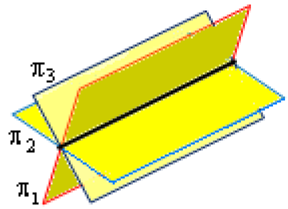
El sistema asociado es:

$$\begin{cases} \pi_1 : x + 10y - 5z = 11 \\ \pi_2 : x + 2y - z = 3 \\ \pi_3 : x - 2y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \ \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \\ -12y + 6z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \ \\ \ \\ 2E3 - 3E2 \end{matrix} \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Como el sistema resulta compatible indeterminado, los tres planos tienen una recta en común. Su ecuación es:

$$r \equiv \begin{cases} x + 10y - 5z = 11 \\ -8y + 4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 11 - 10y + 5z \\ z = -2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \quad t \\ z = -2 + 2t \end{cases}.$$

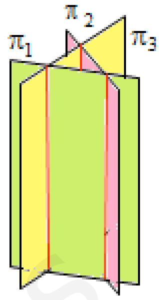


26. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$\pi_1 \equiv 2x+8y-4z=0$; $\pi_2 \equiv x+2y-z=3$; $\pi_3 \equiv x-2y+z=1$.

Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

Solución:



El sistema asociado es: $\begin{cases} \pi_1: 2x+8y-4z=0 \\ \pi_2: x+2y-z=3 \\ \pi_3: x-2y+z=1 \end{cases} \to$ (Por Gauss) $\to$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1-2E3 \\ E2-E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} 12y-6z=-2 \\ 4y-2z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-3E2 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 0=-8 \\ 4y-2z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}.$$

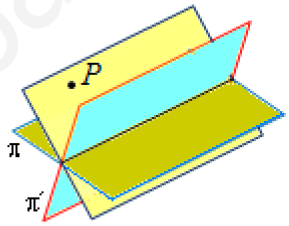
El sistema resultante es incompatible; por tanto, los tres planos no tienen ningún punto en común, se cortan dos a dos.

27. Halla la ecuación del haz de planos determinado por

$\pi: x-y+2z-5=0$ y $\pi': 2x-y-2z+4=0$

De ellos, halla el plano que pasa por el punto $P(0, -11, 4)$.

Solución:



La ecuación del haz de planos es:

$x-y+2z-5+k(2x-y-2z+4)=0$

El plano que pasa por el punto $P(0, -11, 4)$ cumple:

$0-(-11)+2\cdot 4-5+k(0-(-11)-2\cdot 4+4)=0 \Rightarrow 14+7k=0 \Rightarrow k=-2$.

Luego, el plano del haz que contiene a P es:

$x-y+2z-5-2(2x-y-2z+4)=0 \Rightarrow -3x+y+6z-13=0$

28. Halla la ecuación del plano definido por el punto $P(-1, 2, 0)$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Solución:

El plano pedido es uno del haz determinado por la recta, cuya ecuación es:

$x-2y+1+k(x-y+z-1)=0$

Como debe contener a $P(-1, 2, 0) \Rightarrow -4+k(-4)=0 \Rightarrow k=-1$.

El plano pedido es: $x-2y+1-(x-y+z-1)=0 \Rightarrow -y-z+2=0$.

29. Estudia, para los diferentes valores del parámetro m, la posición relativa de los planos:

$\pi_1: mx-y+3z=m$; $\pi_2: 2x+4z=1$; $\pi_3: x-y+2z=-2$

Solución:

Hay que discutir el sistema asociado: $\begin{cases} mx-y+3z=m \\ 2x+4z=1 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$.

Las matrices A, de coeficientes del sistema, y M, ampliada, son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 3 & m \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) = M.$$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4m-6$, que se anula para $m = \frac{6}{4}$.

Por tanto:

- si $m \neq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, el determinante $A \neq 0$ y el rango de A vale 3. En este caso, el sistema será compatible determinado, lo que indica que los tres planos tienen un único punto en común.
- si $m = \frac{3}{2}$, el determinante $A = 0$ y el rango de A vale 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

La matriz M queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & -1 & 3 & 3/2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) = M$.

Como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10+3 \neq 0$, se deduce que el rango de M es 3.

En consecuencia, si $m = \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible, lo que indica que los planos no tiene ningún punto en común. Como ninguno de los planos es paralelo a otro, los planos se cortan dos a dos.

30. Estudia, para los diferentes valores del parámetro a, la posición relativa de los planos:
$\pi_1 : x + y + 2z = 0$; $\pi_2 : x + ay + 3z = 1$; $\pi_3 : x + y + (2-a)z = a$
Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.
<u>Solución:</u>

Se discute el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + y + (2-a)z = a \end{cases}$ en función del parámetro a.

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & a \end{array} \right) = M$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = a - a^2 = a(1-a) \Rightarrow$ Se anula si $a = 0$ o $a = 1$.

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado $\Rightarrow$ Los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $a = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) = M$

Como $F3 = F1 \Rightarrow r(A) = r(M) = 2$. El sistema será compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta: son del mismo haz.

Para $a = 0$, el sistema inicial es equivalente a: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2z \\ x = 1 - 3z \end{cases}$.

Haciendo $z = t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta con: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

- Si $a = 1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$. El rango de A es 2, las columnas 1ª y 2ª son

iguales. Sin embargo, el rango de M vale 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego el sistema

será incompatible. En este caso, los planos no tiene ningún punto en común: se cortan dos a dos.

31. Halla, según los valores del parámetro a, la posición relativa de los planos dados por las ecuaciones: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3y + z = 0 \\ \pi_3 \equiv ax + z = 0 \end{cases}$.

Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.

Solución:

Estos planos forman un sistema homogéneo. Como siempre es compatible, los planos se cortarán en un punto (cuando el rango de la matriz de coeficientes sea 3) o determinarán una recta (cuando el rango sea 2).

La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Su determinante: $|A| = 3(1 - 2a) = 0$ si $a = 1/2$. Con esto:

- Si $a \neq 1/2$, $r(A) = 3$, el sistema será compatible determinado $\Rightarrow$ Los planos se cortarán en un único punto.
- Si $a = 1/2$, $r(A) = 2$. Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ Los planos tiene una recta en común: son del mismo haz.

En este caso ($a = 1/2$), el sistema queda $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ x/2 + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$, cuya solución es la

recta pedida: $r \equiv \begin{cases} x = 6t \\ y = t \\ z = -3t \end{cases}$.

Posiciones relativas de una recta y un plano

32. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.

En el caso de que se corten halla el punto común.

Solución:

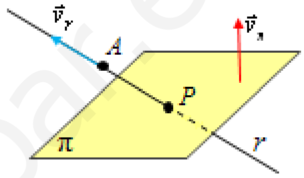
Es inmediato comprobar que la recta y el plano no son paralelos pues el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$, y el normal al plano, $\vec{v}_\pi = (2, -1, 3)$, no son perpendiculares: su producto escalar vale $-2 + 3 \neq 0$.

Tampoco la recta está contenida en el plano, pues el punto $A(0, 0, 1) \in r$ no pertenece al plano.

Por tanto, la recta corta al plano.

El punto de corte puede hallarse sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$\pi \equiv 2(-\lambda) + 3(1+\lambda) = 6 \Rightarrow \lambda = 3.$$



Para $\lambda = 3$ se obtiene el punto $P(-3, 0, 4)$.

33. Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 1)$ y tiene como vector director $(1, 2, -2)$. ¿Existe algún valor de a para el cual la recta r está contenida en el plano $2x + 3y + 4z = a$?

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-2t \end{cases}$.

La recta está contenida en el plano cuando cualquier punto genérico de ella verifica la ecuación del plano. Esto es, cuando las ecuaciones de r cumplen la del plano:

$$2(1+t) + 3(-1+2t) + 4(1-2t) = a \Rightarrow 2 - 3 + 4 + 2t + 6t - 8t = a \Rightarrow a = 3.$$

Por tanto, la recta está contenida en el plano cuando $a = 3$.

34. (Propuesto en Selectividad en 2012, Cataluña)

Dados el plano $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$.

a) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.

b) Calcula la ecuación de la recta s que está contenida en el plano π, es perpendicular a la recta r y corta la recta r.

Solución:

a) El punto de corte es la solución del sistema asociado a las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2 - 2E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 10 \\ -2y + z = 5 \end{cases} \to E3 + E2: -5y = 15 \to y = -3;\ z = -1,\ x = 4.$$

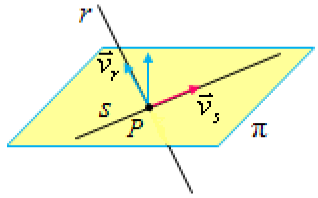
Punto $P(4, -3, -1)$.

b) La recta pedida, s, viene determinada por P y por el vector $\vec{v}_s$, que es perpendicular, a la vez, a $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_\pi = (1, -1, 2)$. Por tanto, $\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{v}_\pi$.

Para determinar $\vec{v}_r$ se expresa la recta r en paramétricas:

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x+y=-z \\ 2x-y=10-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y=-z \\ 3x=10-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r=(-2,\,-1,\,3).$$



Con esto,

$$\vec{v}_s=\vec{v}_r\times\vec{v}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(1,\,7,\,3)\,.$$

En consecuencia, como $P(4, -3, -1)$ es de la recta, sus ecuaciones son: $s\equiv\begin{cases} x=4+t \\ y=-3+7t \\ z=-1+3t \end{cases}$

35. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz-3=0$, se pide:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π según los valores del parámetro m.

b) El punto de intersección de la recta r y el plano π en el caso de $m = 1$.

Solución:

a) Su posición relativa se halla discutiendo el sistema determinado por la recta y el plano:

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ -x-2y+z=0 \\ 2x+y+mz-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \\ 2x+y+mz=3 \end{cases}$$

Haciendo transformaciones de Gauss se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \\ 2x+y+mz=3 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ E2+E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+2z=1 \\ -y+(m-2)z=1 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+2z=1 \\ (m-4)z=0 \end{cases}$$

A partir de la tercera ecuación se concluye:

- Si $m \neq 4$, el sistema tiene solución única. Esto significa que el plano y la recta se cortan en un punto.
- Si $m = 4$, el sistema es compatible indeterminado. Esto significa que la recta está contenida en el plano.

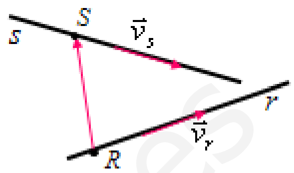
b) Para $m = 1$, el sistema queda: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -y+2z=1 \\ -3z=0 \end{cases}$. Su solución es: $z = 0$, $y = -1$, $x = 2$.

Por tanto, la recta y el plano se cortan en el punto $(2, -1, 0)$.

Posiciones relativas de dos rectas

36. Determina la posición relativa entre las rectas: $r:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$; $s:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

Solución:
Debe estudiarse la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y ***RS***, donde $R \in r$ y $S \in s$.



Si los tres vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, con $\vec{v}_r \neq \vec{v}_s$, se cortan; si $\vec{v}_r = k\vec{v}_s$, las rectas son paralelas.
Se tiene:
$\vec{v}_r$ = (1, 1, –1), $\vec{v}_s$ = (1, 2, 0) y ***RS*** = (1, 0, 0) – (0, 2, 0) = (1, –2, 0)

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, los vectores son linealmente independientes.

En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

37. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = a+2\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 2+5t \\ y = -1+7t \\ z = 3+2t \end{cases}$, determina su posición relativa dependiendo del valor de a.
Solución:
Las rectas nunca pueden ser paralelas, pues $\vec{v}_r$ = (3, 2, 2) y $\vec{v}_s$ = (5, 7, 2) no indican la misma dirección.
Las rectas se cortarán si los vectores $\vec{v}_r$ = (3, 2, 2), $\vec{v}_s$ = (5, 7, 2) y ***RS*** son linealmente dependientes, siendo R un punto de r y S un punto de s.
Si R = (0, a, 1) y S = (2, –1, 3) ⇒ ***RS*** = (2, –1 – a, 2).
Los vectores serán linealmente dependientes cuando su determinante asociado valga 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1-a & 2 \end{vmatrix} = -4a-2 \Rightarrow -4a-2=0 \text{ si } a=-\frac{1}{2}.$$

Las rectas se cortan cuando $a=-\frac{1}{2}$. En los demás casos se cruzan; esto es, cuando $a \neq -\frac{1}{2}$.

38. Dadas las rectas $r: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ y $s:\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$.
a) Comprueba que son paralelas.
b) Halla la ecuación general del plano que las contiene.
Solución:
a) Las ecuaciones de ambas rectas en forma paramétrica son:

$$r:\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-4} \Leftrightarrow r:\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \\ z=2-4t \end{cases} \to \vec{v}_r=(3,\,2,\,-4)$$

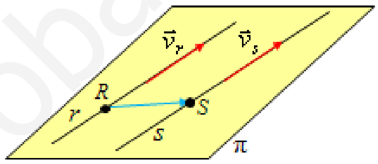
$$s:\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} 2x+y=-5-2z \\ 2x-y=-11-z \end{cases} \to (\text{Sumando } E2+E1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases} 2x+y=-5-2z \\ 4x=-16-3z \end{cases} \Rightarrow x=-4-\frac{3}{4}z\,;\; y=3-\frac{2}{4}z\,.$$

Haciendo $z=4h$ se tiene: $s:\begin{cases} x=-4-3h \\ y=3-2h \\ z=\quad 4h \end{cases} \to \vec{v}_s=(-3,\,-2,\,4)$

Resulta evidente que ambas rectas tienen el mismo vector de dirección: $\vec{v}_r=-\vec{v}_s$.

b) Si dos rectas son paralelas siempre hay un plano que las contiene. Viene determinado por un punto de alguna de ellas, por ejemplo $R=(-5,1,2)\in r$, y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $S=(-4,3,0)\in s$. El vector $\boldsymbol{RS}=(1,2,-2)$.
Por tanto, la ecuación del plano π es:



$$\pi:\begin{cases} x=-5+3t+h \\ y=1+2t+2h \\ z=2-4t-2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 3 & 1 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z-2 & -4 & -2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \pi: 2x+y+2z+5=0$$

39. Determina la posición de las rectas r y s, de ecuaciones:

$$r\equiv\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases} \text{ y } s\equiv\begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases},$$

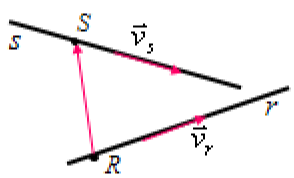
<u>Solución:</u>
Sus ecuaciones en forma paramétrica son:

$$r\equiv\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases} \overset{E1-E2}{\Leftrightarrow} r\equiv\begin{cases} 3x+3y=9 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=3-y \\ y=y \\ 6-4x-z=-5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{haciendo } y=t) \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=3-t \\ y=\quad t \\ z=11-4t \end{cases} \to \vec{v}_r=(-1,\,1,\,-4),\; R=(3,\,0,\,11)\in r.$$

$$s\equiv\begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=-5+y \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=-5+h \\ y=\quad h \\ z=4 \end{cases} \to \vec{v}_s=(1,\,1,\,0),\; S=(-5,\,0,\,4).$$

La dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $R\in r$ y $S\in s$, determina la posición relativa de ambas rectas: si son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.



En este caso:

$\vec{v}_r = (-1, 1, -4)$, $\vec{v}_s = (1, 1, 0)$ y **RS** = (–5, 0, 4) – (3, 0, 11) = (–8, 0, –7)

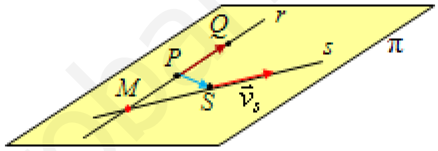
Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 + 7 - 32 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

40. Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*, siendo *r* la recta que pasa por los puntos *P*(0, 8, 3) y *Q*(2, 8, 5) y $s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$. Si se cortan, halla el punto de corte.

Solución:

La recta *r* queda definida por *P*(0, 8, 3) y el vector **PQ** = (2, 8, 5) – (0, 8, 3) = (2, 0, 2).

Su ecuación es: $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.



Las ecuaciones paramétricas de *s* son:

$$s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s: \begin{cases} x = y - 7 \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \text{(haciendo } z = h) \Rightarrow s: \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases}.$$

La posición relativa de *r* y *s* se deduce estudiando la dependencia lineal de los vectores:
$\vec{v}_r = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_s = (2, 2, 1)$ y **PS** = (–7, 0, 0) – (0, 8, 3) = (–7, –8, –3), donde *S* = (–7, 0, 0) es un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cortan.

Para hallar el punto de corte se resuelve el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases} : s \Rightarrow \begin{cases} 2t = -7 + 2h \\ 8 = 2h \\ 3 + 2h = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ h = 4 \end{cases}.$$

Para *h* = 4, sustituyendo en *s*, se obtiene *M*(1, 8, 4). (Obviamente, para *t* = 1/2, sustituyendo en *r*, se obtiene el mismo punto).

41. (Propuesto en Selectividad en 2011, La Rioja)

La recta *r* de ecuación $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ y la recta *s* que pasa por los puntos *P*(1, 0, 2) y *Q*(*a*, 1, 0) se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.

Solución:

Las rectas se cortan cuando los vectores:

$\vec{v}_r = (2, 2, 3)$,

$\vec{v}_s$ = **PQ** = (*a*, 1, 0) – (1, 0, 2) = (*a* – 1, 1, –2) y

RP = (1, 0, 2) – (–3, –4, 3) = (4, 4, –1) sean linealmente dependientes, siendo $R(-3, -4, 3)$ un punto de r y P un punto de s, Para ello:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 14a - 28 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Si $a = 2$, $\vec{v}_s = (1, 1, -2)$, y la recta s será: $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$.

El punto de corte de ambas rectas se determina resolviendo el sistema:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3};\ s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}.$$

Expresando r en sus ecuaciones paramétricas e igualando coordenadas se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -4+2t \\ z = 3+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+2t = 1+\lambda \\ -4+2t = \lambda \\ 3+3t = 2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - \lambda = 4 \\ 3t + 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2; t = 1.$$

El punto pedido es: $C \equiv \begin{cases} x = 1-2 \\ y = -2 \\ z = 2+4 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -2, 6)$.

42. Demuestra que las rectas r y s se cruzan:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = z-2,\ s: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}.$$

Solución:

Se consideran los vectores: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan.

$\vec{v}_r = (3, 3, 1)$, $\vec{v}_s = (3, 4, -3)$; $R = (1, -2, 2)$, $S = (-1, 0, 1) \to \boldsymbol{RS} = (0, 2, -1)$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 15 = 21 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

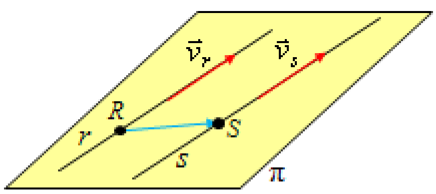
43 Estudia la posición relativa de las rectas $r: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = 1+6\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$.

Si determinan un plano, halla su ecuación.

Solución:

Como $\vec{v}_r = (3, 2, -2)$ y $\vec{v}_s = (6, 4, -4) = 2\vec{v}_r$, las rectas son paralelas o coincidentes.

Al ser $\boldsymbol{RS} = (1, 0, 0) - (3, 1, -1) = (-2, -1, 1)$, con $R(3, 1, -1) \in r$ y $S(1, 0, 0) \in s$, independiente de $\vec{v}_r$,



las rectas no son coincidentes. Por tanto, son paralelas y definen un plano.
El plano queda determinado por el punto *R* y por los vectores $\vec{v}_r$ y ***RS***.
Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z+1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + z = 0.$$

44. Estudia en función de los valores del parámetro *a*, la posición relativa de las rectas *r* y *s*:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}.$$

<u>Solución:</u>
Hay dos métodos que permiten determinar esa posición:
1) Discutir el sistema asociado (sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas). Si el sistema es compatible determinado las rectas se cortan; si es incompatible, se cruzan. (Podría darse también el paralelismo, pero esas dos posiciones se descubren vectorialmente).
2) Estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano, pudiendo ser paralelas o cortarse.

<u>Primer método</u>

Las rectas generan el sistema lineal $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \\ x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M \to (F3 - F1) \to A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = M$$

El determinante de *M*, desarrollado por la primera columna, es:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2a - 2a = -4a \to \text{su valor es 0 si } a = 0.$$

Luego:

- Si $a \neq 0 \Rightarrow r(M) = 4$, con lo que el sistema sería incompatible, pues del rango de *A* como máximo vale 3. En este caso, las rectas se cruzarán.

- Si a = 0, las matrices quedan $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) = M$, cumpliéndose que r(A) = r(M) = 3, ya que $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. En este caso el sistema es compatible determinado (solución única: los cuatro planos tienen un punto en común), lo que indica que las rectas se cortarán.

<u>Segundo método</u>
Expresando las rectas en forma paramétrica se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + at \\ y = \quad\ t \\ z = 1 - at \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3 - h \\ z = \quad\ h \end{cases}.$$

Por tanto: $\vec{v}_r$ = (a, 1, –a), $\vec{v}_s$ = (1, –1, 1) y $\overrightarrow{RS}$ = (1, 3, 0) – (2, 0, 1) = (–1, 3, –1).

Como $\begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 2a = -4a \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes cuando a = 0, y linealmente independientes si $a \neq 0$.
En consecuencia, las rectas r y s se cruzan si $a \neq 0$; y se cortan si a = 0.

<u>Otros problemas (II)</u>

45. Sea r la recta que pasa por los puntos A(1, 1, 1) y B(3, 1, 2); y $s \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

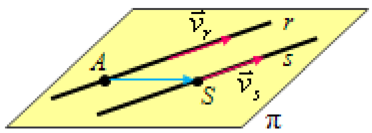
Halla:
a) Su posición relativa.
b) Si se cortan, su punto de intersección.
c) Si existe, el plano que las contenga.
<u>Solución</u>:
Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \rightarrow \text{El vector director es } \vec{v}_r = \vec{b} - \vec{a} = (3, 1, 2) - (1, 1, 1) = (2, 0, 1).$$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{haciendo } z = t) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = \quad\ t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, 0, 1).$$

a) Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$, las rectas son paralelas.

b) ¿Podrían ser coincidentes? No, pues en la recta r la componente y siempre vale 1, mientras que en s la misma componente siempre vale 2.



c) Si dos rectas son paralelas siempre hay un plano que las contiene. Dicho plano viene determinado por el punto $A(1, 1, 1) \in r$, y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{AS}$, siendo S cualquier punto de s.
Tomando $S(1, 2, 0) \Rightarrow \boldsymbol{AS} = (1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (0, 1, -1)$.

El plano pedido es: $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + 2y + 2z - 3 = 0$.

46. (Propuesto en Selectividad 2012, Comunidad Valenciana)

Se dan las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales. Calcula las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2.

<u>Solución:</u>

Igualando las componentes de ambas rectas: $\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ \alpha = 1 + \beta \\ 2 - \alpha = -1 - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1;\ \beta = -2$.

Por tanto, el punto de corte es $P(-1, -1, 3)$.

47. a) Halla la ecuación general del plano que pasa por los puntos (1, 2, 3), (2, 3, 1) y (3, 1, 2)
b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (1, 0, –1) y (1, –1, 0).
c) Determina la posición relativa de la recta y el plano.

<u>Solución</u>:

a) Sean $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(3, 1, 2)$.
El plano viene determinado por el punto $A(1, 2, 3)$ y por los vectores

$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (1, 1, -2)$;

$\vec{w} = \vec{c} - \vec{a} = (3, 1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -1, -1)$

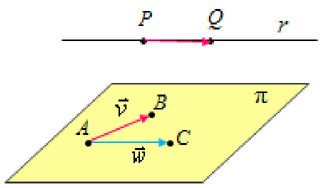
Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x-1) - 3(y-2) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow \pi:\ x + y + z - 6 = 0.$$

b) Sean $P(1, 0, -1)$ y $Q(1, -1, 0)$.
La recta pedida viene determinada por el punto $P(1, 0, -1)$ y el vector:

$\boldsymbol{PQ} = (1, -1, 0) - (1, 0, -1) = (0, -1, 1)$

Su ecuación es: $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \quad -t \\ z = -1 + t \end{cases}$



c) Para determinar la posición relativa entre la recta y el plano se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano. Se obtiene:

$1 - t - 1 + t - 6 = 0 \Rightarrow -6 = 0$

Como esa igualdad no tiene sentido, se concluye que la recta y el plano no se cortan. Esto es, que la recta es paralela al plano.

48. Halla la ecuación de la paralela a la recta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ que pasa por el punto (0, 1, 0).

Solución:

La ecuación de la paralela, r', viene dada por dos planos paralelos a los que determinan r y que pasan por (0, 1, 0). Esto es:

$$r':\begin{cases} x+(y-1)-z=0 \\ 2x-(y-1)+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow r':\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

Sus ecuaciones paramétricas, que se obtienen resolviendo el sistema, son: $r':\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=\quad t \end{cases}$.

De otra forma:

Las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x=1/3 \\ y=-1/3+t \\ z=\qquad t \end{cases} \to \vec{v}_r = (0, 1, 1) \Rightarrow r':\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=\quad t \end{cases}$.

49. Dadas las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 2x-y=m \\ z+2y=3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases}$.

¿Qué valor debe tomar m para que ambas rectas se corten?

Solución:

Las rectas se cortarán cuando el sistema determinado por los cuatro planos que las definen tenga solución única.

El sistema es: $\begin{cases} r \equiv \begin{cases} 2x-y=m \\ z+2y=3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ x+2z=3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y \quad =m \\ \quad 2y+z=3 \\ x+y \quad\ =2 \\ x \quad +2z=3 \end{cases}$

Este sistema será compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada, y ambos iguales a 3.

La matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 3, pues el menor $|A_1|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$.

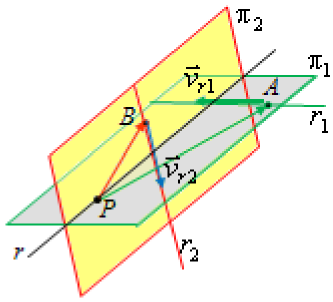
Para que el rango de M sea 3 es necesario que su determinante sea nulo. Luego, como

$|M|=5(m-1) \Rightarrow m=1$

Las rectas se cortan cuando m = 1.

50. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}.$$



Solución:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_1, que pasa por P y contiene a r_1, y π_2, que pasa por P y contiene a r_2

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = \quad 2t \end{cases} \to \text{Se tiene } \vec{v}_{r1} = (1, -1, 2) \text{ y } A \in r_1, A(2, 1, 0)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x+z=1-2y \\ 2x-z=3+y \end{cases} \Leftrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \quad h \\ y = 4+3h \\ z = -7-7h \end{cases} \to$$

Se tiene $\vec{v}_{r2} = (1, 3, -7)$ y $B \in r_2$, $B(0, 4, -7)$

El plano π_1 viene dado por P, $\vec{v}_{r1}$ y $\boldsymbol{AP} = (-1, -1, 0)$, su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & -1 & -1 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-y-z-1=0.$$

El plano π_2 viene dado por P, $\vec{v}_{r2}$ y $\boldsymbol{BP} = (1, -4, 7)$, su ecuación es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 3 & -4 \\ z & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+2y+z-1=0.$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = \quad t \\ y = 2-2t \\ z = -3+3t \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

51. (Propuesto en Selectividad en 2011, Madrid)

Halla el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x+3y+7z=24$.

Solución:

Para determinar los otros tres vértices se hallan las intersecciones del plano con cada una de las rectas:

- $r_1 \cap \pi$: $\pi \equiv 2x+3x+7x=24 \Rightarrow x = 2$. Punto $A = (2, 2, 2)$.
- $r_2 \cap \pi$: $\pi \equiv 2x = 24 \Rightarrow x = 12$. Punto $B = (12, 0, 0)$.
- $r_3 \cap \pi$: $\pi \equiv 3y = 24 \Rightarrow y = 8$. Punto $C = (0, 8, 0)$.

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$\boldsymbol{OA} = (2, 2, 2)$; $\boldsymbol{OB} = (12, 0, 0)$ y $\boldsymbol{OC} = (0, 8, 0)$.

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de esos tres vectores.

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2 & 2 & 2\\ 12 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 12\cdot 8=32 \text{ unidades cúbicas.}$$

52. (Propuesto en Selectividad en 2012, UNED)
Halla *a* y *b* para que los tres planos $\pi_1: x+2y-z=1$, $\pi_2: 2x+y+az=0$ y $\pi_3: 3x+3y-2z=b$ contengan a una misma recta *r*. Determina unas ecuaciones paramétricas de *r*.

Solución:

Tres planos contienen a una misma recta cuando son del mismo haz. Ello implica que el sistema asociado debe ser compatible determinado con un grado de indeterminación.

El sistema es: $\begin{cases} x+2y-z=1\\ 2x+y+az=0\\ 3x+3y-2z=b\end{cases}$. Se necesita que $r(A)=r(M)=2$, siendo *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & a & 0\\ 3 & 3 & -2 & b\end{array}\right)=M$

Para que $r(A)=2$ debe cumplirse que $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3a+3=0 \to a=-1$.

Para que $r(M)=2$ debe cumplirse, además, que cualquier otro menor de orden 3 sea también nulo. Por ejemplo (sustituida ya *a* por –1), $|M_1|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -2 & b\end{vmatrix}=0 \Rightarrow b-1=0 \to b=1$.

En consecuencia, cuando $a=-1$ y $b=1$, los tres planos contienen a la misma recta.

Su ecuación se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y-z=1\\ 2x+y-z=0\\ 3x+3y-2z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1\\ 2x+y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1-2y\\ 2x-z=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1\end{matrix}\begin{cases} x-z=1-2y\\ x=-1+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}E1-E2\\ \\ \end{matrix}\begin{cases} -z=2-3y\\ x=-1+y\end{cases}$.

Haciendo $y=t$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta: $r\equiv\begin{cases} x=-1+t\\ y=t\\ z=-2+3t\end{cases}$.