

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Hallar el rango de A en función de los valores de k.
b) Para $k = 2$ hallar, si existe, la solución del sistema $A X = B$.
c) Para $k = 1$ hallar, si existe, la solución del sistema $A X = C$.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & -2 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4k \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = -4k(1-k^2)$$

k factor en f_1 y 2 en f_3 $f_2 \rightarrow f_2 - f_1$ desarrollando por f_2

$$|A| = 0 \rightarrow -4k(1-k^2) = 0 \rightarrow k = 0, k = 1, k = -1$$

Por tanto, $\forall k \neq 0, k \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$

$$k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

$$k = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango}(A) = 2 \text{ pues } f_3 = -2 f_2$$

$$k = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango}(A) = 2 \text{ porque } f_3 = 2 f_1$$

b) Para $k = 2$, resolvemos por el método de Gauss el sistema $A X = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2z = 6 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$$

$$z = 4 - 2x \rightarrow x + 8 - 4x = 6 \rightarrow 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow z = \frac{8}{3}$$

c) Para $k = 1$, el sistema $A X = C$ queda así: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ que es claramente

incompatible por serlo sus dos últimas ecuaciones.

2. Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \rightarrow c_1 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & ab & b^2 \\ 2a - 2b & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & ab & b^2 \\ 2(a-b) & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

(a-b) factor de c_1

$$= (a-b) \begin{vmatrix} (a+b) & ab & b^2 \\ 2 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 \rightarrow c_3 - c_2} \begin{vmatrix} (a+b) & ab & b^2 - ab \\ 2 & a+b & 2b - (a+b) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} (a+b) & ab & b(b-a) \\ 2 & a+b & b-a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(b-a) factor en c_3

$$= (a-b)(b-a) \begin{vmatrix} (a+b) & ab & b \\ 2 & a+b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollo por } f_3} (a-b)(b-a)(-1) \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^3$$

3. Encontrar un número real $\lambda \neq 0$ y todas las matrices B de dimensión 2x2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda x + 3y = 3x + 9y \\ y = 3y \\ \lambda z + 3t = 3z + 9t \\ t = 3t \end{cases} \rightarrow y = 0, t = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda x = 3x \\ \lambda z = 3z \end{cases} \rightarrow \lambda = 3$$

λ tiene que valer 3, porque si no, resultaría $x = 0 = z$, y sería $B = 0$

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \text{ con } x \neq 0 \text{ o } z \neq 0 \text{ para que } B \text{ no sea la matriz nula}$$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{-1}

b) Hallar la matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$

a) $|A| = 1$, $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para calcular la matriz X, la despejamos de la ecuación $A \cdot X \cdot A^t = B$. Para ello multiplicamos esta ecuación, por la izquierda, por A^{-1} y, por la derecha, por $(A^t)^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}$$

$$|A^t| = |A| = 1 \quad , \quad Adj(A^t) = (Adj A)^t = A^{-1} \quad , \quad (A^t)^{-1} = [Adj(A^t)]^t = (A^{-1})^t$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Dado el sistema

$$\begin{cases} (1-a)x - 2y + 4z = 0 \\ x - (1+a)y + z = 0 \\ -x + ay - z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a .
b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

a) Se trata de un sistema homogéneo por lo que siempre será compatible. Habrá que ver cuándo (para qué valores de a) es determinado o indeterminado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 1 & -(1+a) & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2 \rightarrow f_2 + f_1} \begin{vmatrix} 1-a & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{desarrollo por } f_2} (-1)(a-1+4) = -(a+3)$$

Si $a \neq -3$, $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = 3$, sistema compatible determinado.

Si $a = -3$ el sistema será compatible indeterminado.

b) Para $a = -3$ lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \rightarrow \frac{1}{2} f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$f_3 \rightarrow f_3 + f_2$

6. a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

b) Resolverlo en los casos en que sea compatible.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 8 + 3\lambda - 4\lambda^2 - 2 + 6\lambda = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$$

$|A| = 0 \rightarrow \lambda = 2, \lambda = \frac{5}{2} \rightarrow$ Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$, $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A')$ sistema compatible determinado.

Para $\lambda = 2$, $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ ya sabemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

entonces c_1 y c_2 son independientes. Para analizar el rango de la matriz ampliada A'

calculamos $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, luego $\text{rango } A' = 3$ y el sistema es

incompatible.

Para $\lambda = \frac{5}{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Al igual que antes,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{25}{2} - \frac{28}{2} + 40 \neq 0, \text{ rango } (A') = 3 \text{ y el sistema}$$

es incompatible.

b) Utilizaremos la regla de Cramer:

$$A_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 4\lambda + 3\lambda - 2\lambda^3 - 2 + 3 = -2\lambda^3 + 1 \rightarrow x = \frac{-2\lambda^3 + 1}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 1 + 4\lambda^2 = 6\lambda^2 - 2\lambda - 5 \rightarrow y = \frac{6\lambda^2 - 2\lambda - 5}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

$$A_z = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^3 + 8 + 3 - 4\lambda - 4\lambda - 6\lambda = 4\lambda^3 - 14\lambda + 11 \rightarrow z = \frac{4\lambda^3 - 14\lambda + 11}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10}$$

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$.

b) Hallar A^n .

$$A = 2M, \text{ siendo } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M$$

a) $A^2 = (2M)^2 = 4M^2 = 4M$

$$A^3 = (2M)^3 = 8M^3 = 8M^2M = 8MM = 8M^2 = 8M$$

$$A^3 - 2A^2 = 8M - 2 \cdot (4M) = 8M - 8M = 0$$

b) $A^n = (2M)^n = 2^n \cdot M^n$

Pero $M^3 = M^2M = MM = M^2 = M$, $M^4 = M^3M = MM = M^2 = M$, ...

Y $M^n = M$ por lo que $A^n = (2M)^n = 2^n \cdot M^n = 2^n M$

www.yoquieroaprobar.es