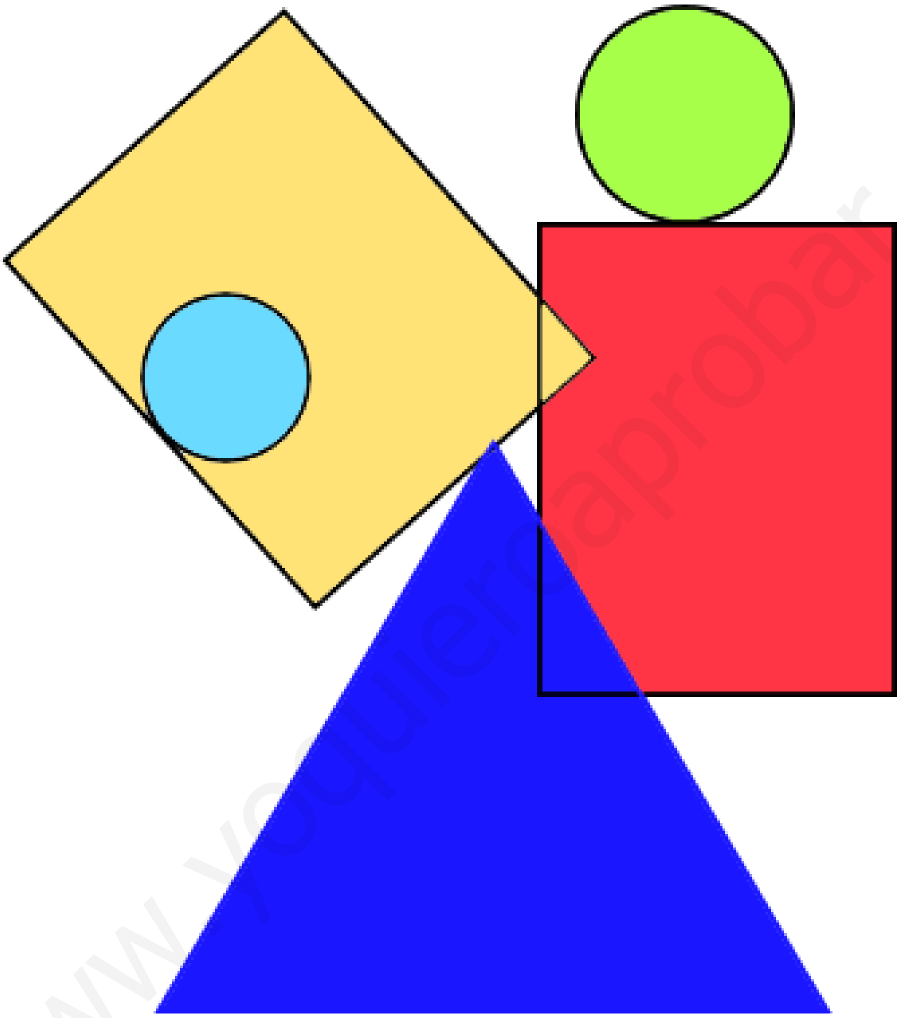
MATEMÁTICAS II



José M. Ramos González

Este libro es totalmente gratuito y solo vale la tinta y el papel en que se imprima. Es de libre divulgación y no está sometido a ningún copyright. Tan solo se pide que, en caso de distribución, se indique el nombre de su autor.

Las nociones que a continuación se exponen son resultado de la voluntad de recopilar en un texto los contenidos de la materia de Matemáticas II de segundo curso de bachillerato, siguiendo las pautas del equipo de trabajo de la CIUG para la realización de las pruebas de acceso a la Universidad.

Este cuaderno fue realizado en el mes de julio y agosto de 2014 y puede contener errores tipográficos y de otro tipo ya que no ha sido revisado en profundidad.

No se trata de un libro de texto sino de una guía breve de apoyo al alumnado con los conceptos teóricos y prácticos que necesita.

El desarrollo más exhaustivo siempre lo realizará el profesor.

José Manuel Ramos González

I.E.S. A Xunqueira I
Pontevedra, agosto 2014

ÍNDICE

TEMA I

MATRICES Y DETERMINANTES

MATRICES

Definición.- Se llama matriz A de orden **nxp** a un conjunto de **np** números reales ordenados en **n** filas y **p** columnas. Los elementos numéricos que constituyen una matriz se representan mediante la expresión $\mathbf{a_{ij}}$, donde los subíndices **i** y **j** indican, respectivamente, la fila (i) y la columna (j) que ocupa dicho elemento en el conjunto de la matriz.
Representamos el conjunto de matrices nxp por $\mathcal{M}_{nxp}$

Ejemplo de una matriz 2x3

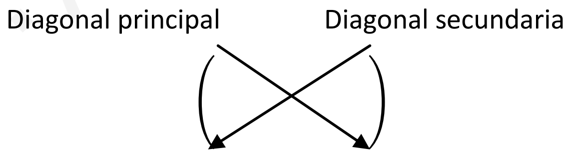
$$\begin{array}{cc} & \text{3 columnas} \\ & \downarrow \\ \text{2 filas} \longrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$a_{11}= 3$; $a_{12}= 1$; $a_{13}= 0$; $a_{21}= 4$; $a_{22}= 5$; $a_{23}= 6$

Tipos de matrices.- Según su orden y su composición, algunas matrices tienen una denominación particular por sus peculiaridades. Así, dentro de las matrices de orden nxp, tenemos:

a) *Matriz nula*.- Es aquella cuyos componentes numéricos son todos 0.
b) *Matriz cuadrada*.- Es aquella en la que el número de filas coincide con el número de columnas (**n=p**). Es una matriz que se va a utilizar con frecuencia, por lo que su orden se expresa simplemente citando un valor (**n**).

Dentro de una matriz cuadrada de orden n, se llama *diagonal principal* al conjunto de números a_{ij} tales que i = j.
Dentro de una matriz cuadrada, se llama *diagonal secundaria* al conjunto de números a_{ij} tales que i + j = n+1



c) *Matriz identidad*.- Una matriz cuadrada se llama matriz Identidad de orden n cuando los elementos de la diagonal principal son unos y el resto 0, es decir:

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i=j \quad \text{y} \quad a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j$$

La matriz identidad de orden 3 es:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) *Matrices triangulares*.- Una matriz cuadrada es *triangular superior* si los elementos que están situados por debajo de la diagonal principal son 0. Por el contrario es triangular inferior si son 0 los elementos situados por encima de la diagonal principal:

triangular inferior.- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ triangular superior.- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

En la triangular inferior se cumple que $a_{ij}=0$ si $i<j$
En la triangular superior se cumple que $a_{ij}=0$ si $i>j$

e) *Matríz simétrica*.- Es aquella matriz cuadrada en la que $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

f) *Matriz antisimétrica*.- Es aquella matriz cuadrada en la que $a_{ij} = -a_{ji.}$ con $i \neq j$
g) *Matriz diagonal*.- Todos sus elementos son cero salvo los de la diagonal principal.

h) *Matriz traspuesta*.- Dada una matriz A de orden nxp, se llama matriz traspuesta de A a la matriz A^t de orden pxn, que se obtiene transformando las filas de A en columnas y las columnas en filas.

Si una matriz A es simétrica, se verifica que $A = A^t$
Si una matriz A es antisimétrica, $A+A^t$ es una matriz diagonal

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

i) *Matriz fila*.- La que tiene una sola fila. $B= (2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$
j) *Matriz columna*.- La que tiene una sola columna. B^t

OPERACIONES CON MATRICES

Suma:
Dadas dos matrices A, B de orden nxp, se define la suma, como la matriz A+B de orden nxp que se obtiene sumando los elementos de A y B que ocupan la misma posición relativa en ambas matrices.

$A= (a_{ij})$ $i=1\ldots n; j=1\ldots p$ $B = (b_{ij})$ $i=1\ldots n; j=1\ldots p$

$A+B = (c_{ij})$ $i=1\ldots n; j=1\ldots p$ de modo que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Si las matrices no tienen el mismo orden, no pueden sumarse.

Propiedades de la suma:

a) Commutativa $A+B = B+A$

b) Asociativa (A+B)+C = A+(B+C)
c) Elemento neutro: Es la matriz nula de orden nxp, A+(0) = A, siendo (0) la matriz nula de orden nxp
d) Elemento opuesto de A. Es la matriz –A, de modo que A+(-A) = (0)

Con estas propiedades, el conjuntos de matrices de orden nxp con la operación suma, es un *grupo aditivo abeliano.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\3 & 4 & -6\\5 & -6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 4 & 8\\5 & -6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 12\\5 & 8 & 2\\10 & -12 & 14\end{pmatrix}$$

Producto por escalares:

Sea A una matriz de orden nxp y k un número real. Se define la matriz k.A de modo que si A= (a_{ij}) i=1…n; j=1…p, entonces kA= $(k.a_{ij})$ i=1…n; j=1…p

Ejemplo:

$$2.\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\3 & 4 & -6\\5 & -6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 10\\6 & 8 & -12\\10 & -12 & 14\end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices combinando la suma con el producto por escalares:

a) Asociativa (k+k')A = k.A+k'.A
b) Asociativa k(A+B) = k.A + k.B
c) (k.k')A = k. (k'.A)
d) 1.A = A

$$\forall A \in \mathcal{M}_{nxp} \quad \forall k, k' \in \mathbb{R}$$

$(\mathcal{M}_{nxp}, +, \ .esc.)$ es un ***espacio vectorial*** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$

Producto de matrices.-

Dadas dos matrices A, B de orden nx**p**, y **p**xq respectivamente, se define el producto como la matriz C de orden nxq, de modo que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} \quad \text{con } i=1\ldots n;\ j=1\ldots q$$

Obsérvese que, según la definición, para que dos matrices puedan multiplicarse, *el número de columnas de la primera ha de coincidir con el número de filas de la segunda.*
Este hecho relevante nos indica que *el producto de matrices no es conmutativo.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\3 & 4 & -6\\5 & -6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 13 & 9\\49 & -4 & 32\end{pmatrix} \quad (\mathbf{2}\text{x}3).(3\text{x}\mathbf{3}) = (\mathbf{2}\text{x}\mathbf{3})$$

Propiedades del producto de matrices:

a) Asociativa (A.B).C = A.(B.C)
b) En el conjunto de matrices cuadradas A.I = I.A = A, siendo I la matriz identidad de igual orden que A.
c) Distributiva respecto de la suma A(B+C) = A.B + A.C

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA.

Definición.- Se llama permutación de n elementos a cualquier aplicación biyectiva σ entre el conjunto de los primeros n números naturales (1,2,3…n) y él mismo.
Así: $\sigma(1) = 1;\ \sigma(2) = 3;\ \sigma(3) = 2$ es una permutación de 3 elementos. Por economía se suele identificar la aplicación biyectiva con el conjunto imagen, es decir (1,3,2)

Se llama orden natural a la permutación (1,2,3…n).

Por ejemplo, las permutaciones de 3 elementos son 6:
1,2,3 ; 1,3,2 ; 2,1,3; 2,3,1; 3,1,2; 3,2,1 siendo 1,2,3 el orden natural.

En general, el número de permutaciones de n elementos viene dado por n!
n! = n (n-1)(n-2)…3.2.1
En el ejemplo anterior, las permutaciones de 3 elementos son 3! = 3.2.1 = 6.

Denominaremos el conjunto de las permutaciones de n por S_n

Inversiones en una permutación.- Dada una permutación $\boldsymbol{\sigma}$ de n elementos, se dice que i y j presentan una **inversión**, si en la permutación, i y j están desordenados en relación con el orden natural. Es decir que si i<j $\Longrightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$

En la permutación de 5 elementos (1,**3**,5,4,**2**) 3 y 2 presentan una inversión porque han alterado el orden natural.
Dada la permutación de n elementos $\boldsymbol{\sigma}$**,** representaremos el número de inversiones por I($\boldsymbol{\sigma}$)**.**

En la permutación 1,3,5,4,2 los pares 3,2 ; 5,4; 5,2; 4,2 son las inversiones presentes, por tanto $I(\sigma) = 4$

Sinatura o paridad de una permutación.-

Dada la permutación de n elementos σ, se llama **sinatura** de σ a

$$sig(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

es decir que la sinatura vale 1 si el número de inversiones es par (permutación par)
La sinatura vale -1 si el número de inversiones es impar (permutación impar)

***Determinante de una matriz cuadrada*:**

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$. Se llama **determinante** de A, y se representa por |A|, al número real siguiente:

$|A| = \sum_{\sigma \epsilon S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n-1\sigma(n-1)} a_{n\sigma(n)}$

Obsérvese que en cada sumando (hay n! sumandos, puesto que el número de permutaciones de n es n!) se toma un *único* elemento de cada fila y de cada columna, precediendo el producto de la sinatura de la permutación que conforma los subíndices de las columnas, manteniendo siempre el subíndice de las filas en el orden natural.

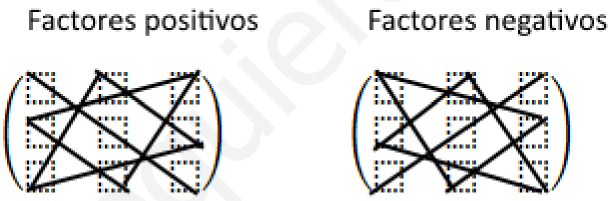
Ejemplo: En el determinante de una matriz cuadrada de orden 2, tenemos que las permutaciones de 2 elementos son $\sigma_1(1,2)$ y $\sigma_2\ (2,1)$

$\mathrm{I}(\sigma_1) = 0 \quad \mathrm{I}(\sigma_1) = 1$

$|A| = a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} - a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$ Esto es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

***Determinante de una matriz de orden 3. Regla de Sarrus*:**



$a_{11}a_{22}a_{33}$ $a_{13}a_{22}a_{31}$

$a_{12}a_{23}a_{31}$ $a_{12}a_{21}a_{33}$

$a_{13}a_{21}a_{32}$ $a_{11}a_{23}a_{32}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.4.2 + 1(-1)(-2) + 2.3.3 - 3.4(-2) - 1.2.2 - (-1).3.1 = \mathbf{51}$$

Para el cálculo de los determinantes de orden superior a 4, veremos a continuación como se pueden reducir a órdenes inferiores para ser resueltos.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

En este capítulo llamamos línea, a una fila o columna indistintamente y siempre que mencionemos las matrices se entenderán que son cuadradas si no se indica lo contrario.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

2) Si $|A|=0$ si:

   a) Dos filas o columnas son iguales
   b) Todos los elementos de una línea son cero
   c) Una fila o columna es combinación lineal de las otras.

3) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

4) Si intercambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

5) Si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra, multiplicada previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Esta propiedad combinada con la número 3, me permite hacer ceros en la matriz para reducir los cálculos en la obtención de determinantes (Método de Gauss)

6) Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, ***y solo una***. Una generalización de esta propiedad es que el determinante de un número k por una matriz A es k^n por el determinante de A.

7) Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos o más sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos o más determinantes en los que las demás filas o columnas permanecen invariables.

8) $|A.B|=|A|.|B|$

Cálculo del determinante. Método de Gauss.

Utilizando la propiedad 3 y 5 de las citadas anteriormente, hacemos ceros por encima de la diagonal principal o por debajo, y el determinante será, por la propiedad 3, el producto de los elementos de la diagonal principal.
Ejemplo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25$$

$F_2 = F_1+F_2$, $F_3=(-2)F_1+F_3$

RANGO DE UNA MATRIZ

Definición.
Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, y sea a_{ij} un elemento de dicha matriz. Llamamos **menor complementario** del elemento a_{ij}, al determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij}. Este valor se representa por m_{ij}.

Definición.
Sea $A \in \mathcal{M}_{nxp}$, una matriz de orden nxp. Se llama **rango** de A, al *orden de la submatriz obtenida de A que determine el mayor menor complementario no nulo.*

El concepto de rango es muy importante para posteriores estudios.

Proposición.
El rango de una matriz coincide con el mayor número de filas o columnas linealmente independientes.

MATRIZ ADJUNTA

Definición. Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n. Sea a_{ij} un elemento de dicha matriz. Llamamos **adjunto de a_{ij}** al valor del menor complementario obtenido al eliminar la fila i y la columna j en A, con el signo + o -, según que i+j par o i+j impar respectivamente. Al adjunto lo representamos por A_{ij}. Es decir que $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, m_{ij}$.

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, Vamos a calcular el adjunto del elemento $a_{23} = 6$.
El menor complementario que se obtiene al eliminar la fila 2 y la columna 3 que es la posición del 6, es el siguiente:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es -2. Dado que 2+3 es impar, el adjunto buscado es 2, es decir que $A_{23} = 2$.

***Definición.*-** Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n. Se llama **matriz adjunta** de A, y la representaremos por $\bar{A}$, a la matriz formada por los adjuntos de A en sus posiciones relativas.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, su matriz adjunta es $\bar{A} = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -7 \\ -12 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

***Cálculo de determinantes por adjuntos*:**

Proposición.-
El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos de una fila o columna por sus correspondientes elementos adjuntos.
Esto nos permitirá calcular determinantes de orden superior y reducirlos a órdenes menores.
Veamos un par de ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 23 - 20 - 7 = -4$$

Para abreviar cálculos es interesante utilizar el desarrollo por una línea o columna con el mayor número de ceros posibles. En caso de que no haya ceros, se pueden obtener utilizando la propiedad 5 de los determinantes, como en el ejemplo siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 \\ 0 & 6 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -7 & 7 & -9 \\ 6 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 20 & 43 & -9 \\ 30 & -33 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 43 \\ 30 & -33 \end{vmatrix} = -1950$$

F3=-5.F1+F3 y F4=2F1+F4 C1=-3.C3+C1 y C2=-4C3+C2

MATRIZ INVERSA

***Definición*.-** Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, cuadrada de orden n y determinante no nulo. Se llama **matriz inversa** de A, y la representaremos por A^{-1}, a aquella matriz cuadrada de orden n, tal que:

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

La matriz inversa $A^{-1} = \frac{\bar{A}^t}{|A|}$, es decir la adjunta de la traspuesta (o la traspuesta de la adjunta), multiplicada por el inverso del determinante de A.

Ejemplo: Pasos para el cálculo de la inversa.

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 1º) Se calcula el determinante. Si este fuese cero, no existe inversa.
|A|= 35+36+8-15-12-56 = -4 $\neq$ 0

2º) Se calcula la matriz adjunta, que en este caso es $\bar{A} = \begin{pmatrix} 23 & -10 & -7 \\ -12 & 4 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

3º) Se traspone la matriz adjunta, obteniendo

$$\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 23 & -12 & 7 \\ -10 & 4 & -2 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4º) Se divide por -4

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -23/4 & 3 & -7/4 \\ -5/2 & -1 & 1/2 \\ 7/4 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que es correcto el cálculo, basta multiplicar $A.A^{-1}$ y $A^{-1}.A$. El resultado debe ser la matriz identidad de orden 3.

Método de Gauss para el cálculo de la matriz inversa:

Ejemplos: Cálculo de la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

F2 = (-3)F1+F2 F2= F1+F2 F2 = F2/(-2)

La inversa es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo de matriz de orden 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

F3 = F3/2 F2=(-2)F1+F2

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

F1= F1-F3 F2=F3+F2

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1) Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

a) Hallar A^{-1} y B^{-1}
b) Calcular el determinante de $AB^{2013}A^t$
c) Resolver la ecuación AX-B = AB

a) $|A| = 2$, $|B| = 0$. Para B no hay matriz inversa.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $|AB^{2013}A^t| = |A|.|B|^{2013}.|A^t| = 2.0.2 = 0$

c) $AX-B = AB$; $A^{-1}(AX-B) = A^{-1}(AB)$; $X- A^{-1}B = B$; $X = B + A^{-1}B$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5/2 \\ 3 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

2) Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Hallar X / $AXB = C^t$

$|A| = 1$, $|B| = -1$ $\quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}\, C^t\, B^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

3) Sea A = $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar λ para que A^2+3A no tenga inversa.
Para $\lambda = 0$ hállese X / AX+A = 2I

$A^2+3A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+5\lambda+4 & 0 \\ \lambda+3 & -2 \end{pmatrix}$

$|A^2+3A| = -2\lambda^2-10\lambda-8 = 0$; $-\lambda^2-5\lambda-4 = 0$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

Si λ = 0

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; |A| = -1 ; $\bar{A}$= $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $tras(\overline{A})$= $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; A^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AX+A = 2I ; A^{-1} (AX+A) = A^{-1} 2I; X = A^{-1} 2I – I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

X = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4) Demostrar que si |A|≠0, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Puesto que según la propiedad 8 de los determinantes que nos dice que |A.B| = |A|.|B|
1 = |I| = $|A.A^{-1}|$ = $|A|.|A^{-1}|$, de donde $|\mathbf{A^{-1}}| = \frac{1}{|A|}$

5) Sean A y B dos matrices de orden 3 tal que |A| = ½ y |B| = -2. Calcular:
$|A^3|$ $|A^{-1}|$ |-2A| $|AB^t|$ rang(B)

$|A^3|$ = 1/8 $|A^{-1}|$ = 2 |-2A| = -4 $|AB^t|$ = -1 rang(B) = 3

6) Sea A = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar α de modo $A^{-1} = \frac{1}{12}A$
b) Para $\alpha = -3$, hallar X tal que A^tX = B

a) Si multiplico por A, tenemos que 12.I = A^2, es decir: $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha & \alpha+3 \\ -\alpha^2-3\alpha & -\alpha+9 \end{pmatrix}$, igualando miembro a miembro resulta que

$$\alpha = -3$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $|A^t| = -12$ $\quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2/3 & 5 & 7/3 \end{pmatrix}$$

7) $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}}$ **y B=** $\boldsymbol{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

a) Hallar el rango de A en función de $\propto$

b) Para $\alpha = 2$ resuelve la ecuación matricial $A^tX = B$

a) $|A| = \propto^3 - 3\propto + 2 = 0$, para $\alpha = 1, 2$

Si $\alpha = 1$, rango de A es 1, pues no existe menor complementario de orden 2 no nulo.
Si $\alpha = 2$, rango de A es 2, pues encontramos menores de orden 2 no nulos.

b) $X = (A^t)^{-1}B = (0 \quad ½ \quad 2)$

8) Dadas las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}}$ $\quad \boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

a) Hallar el valor de $\boldsymbol{\lambda}$ **para que A no tenga inversa.**

b) **Para $\boldsymbol{\lambda = 1}$, resuelve A^{-1} X A** = B

a) $|A| = \boldsymbol{\lambda^2 + 1}$ **= 0. A tiene inversa para todo valor de $\boldsymbol{\lambda}$**

b) $X = A\,B\,A^{-1}$

$|A| = 2$; $\quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

9) Dadas la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}}$

a) rango(A) en función de k

b) Para k=0, hallar A^{-1}

a) $|A| = k + 3 + 7k^2 - k - 21 - 3k^2 = 4k^2 - 18 = 0 \quad k = 9/2 , -9/2$

Si k = 9/2, rango = 2 . Si k = -9/2, rango =2. Si $k \neq \pm 9/2$, rango = 3.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $|A| = -18$ $Adj(A) = \begin{pmatrix} -21 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{-1}{18}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

10) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Hallar m para que rango (A) < 3

b) Resolver la ecuación $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para los valores de m del apartado a

$|A| = m^4 - 2m^3 + m^2 = m^2(m^2 - 2m + 1) = 0$; $m = 0$, $m = 1$

Si m = 0, el rango de A es 1. Si m=1, el rango de A es 1.

Para m = 0 no tiene solución
Para m = 1 tiene infinitas soluciones: $x+y+z = 1$.

11)

a) **Hallar m, para que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifique $2A^2 - A = I_2$ y hallar A^{-1} para dicho valor de m, utilizando el método de Gauss y el cálculo por adjuntos.**

b) **Si M es cuadrada de modo que $2M^2 - M = I$, determinar M^{-1} en función de M e I.**

$2A^2 - A = I_2$, implica, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2m+2 & 2m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2m+2 & 2m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1+m \end{pmatrix}$$

se tiene que verificar simultáneamente que $2m+2 = 1$, $2m^2=1+m$. De la primera ecuación, obtenemos que $m = -1/2$, y de la segunda $m = 1$ y $m = -1/2$, de donde la solución es $m = -1/2$.

Calculo de A^{-1} por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

F2= (-1)F1+F2 F2= (-2)F2

Por el otro método, sería: $|A| = -1/2$, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si la trasponemos $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y dividimos por -1/2, obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$2M^2 - M = I$ multiplicando ambos miembros por la derecha por M^{-1} resulta que $2M - I = M^{-1}$

12) $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$

a) **Calcula a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$**

b) **Escribir en función de a, los determinantes de 2A y A^t**

c) **¿Existe algún valor de a para que A sea simétrica? Razona la respuesta.**

$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & -a^2 - a \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2 - a = 12, & a = 4, -3 \\ -a^2 - a = 20, & a = 4, -5 \end{cases}$ Sol: a =4.

c) $|2A| = -4a^2$ $|A^t| = -a^2$

No existe ningún valor de a para que A sea simétrica, puesto que $a_{12} \pm a_{21}$ para cualquier valor de a.

13) Si $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{t} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = -6$ **Calcular, indicando las propiedades que se utilizan:**

$\begin{vmatrix} -3\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{y} & -\boldsymbol{z} \\ 3\boldsymbol{t} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \\ 3\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2\boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \\ -2\boldsymbol{u} & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{v} \\ -2\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{t} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \\ 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} & 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b} & 2\boldsymbol{z} - \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = 3(-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 18$ (propiedad 6 de los determinantes)

; $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ = -2 $\begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix}$ = 2 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$ (propiedad 6 y 4)

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x - a & 2y - b & 2z - c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ -a & -b & -c \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6$

(propiedad 6 y 7)

14. Sea M = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *y* N = M + I, donde I denota la matriz identidad de orden n, calcula N^2 y M^3. ¿Son M o N inversibles? Razonar la respuesta. (Santiago junio 2001)

SOLUCIÓN:

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

M no es inversible pues det (M) = 0. N es inversible pues det(N) = 1.

15. Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las filas de una matriz cuadrada de orden P 4x4 tal que su determinante vale 3. Calcular razonadamente el valor del determinante de la inversa de P, el valor del determinante de la matriz αP, donde α denota un número real no nulo, y el valor del determinante de la matriz tal que sus filas son $2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4$
(Santiago junio 2001)

SOLUCIÓN:

$|P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3}$; $|\alpha P| = \alpha^4 |P| = 3\alpha^4$; $\begin{vmatrix} 2F_1 - F_4 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2F_1 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_4 \\ F_3 \\ 7F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} =$

Obsérvese que el segundo determinante tiene dos filas iguales, por lo que su valor es 0.

$14.\begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_4 \end{vmatrix} - 0 = -14 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{vmatrix} = -42$

16. Calcula los valores del parámetro a para los cuales la matriz M no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de M para a =2, si es posible.

$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}}$ **(Santiago, Septiembre 2001)**

SOLUCIÓN:

$|M| = -a^2 + 4a - 3$. Ecuación de segundo grado de raíces 1 y 3. Para esos valores M no tiene inversa.
Si la tiene para a = 2. $|M| = 1$. Escribimos la matriz adjunta de M, $\bar{M} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ la trasponemos, dividimos por |M| y obtenemos la inversa:

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

17. Dadas tres matrices A, B y C se sabe que A.B.C es una matriz de orden 2x3 y que B.C es una matriz de orden 4x3, ¿cuál es el orden de A? Justifíquelo. (Santiago, junio 2002)

SOLUCIÓN:
Para poder multiplicarse dos matrices, el número de columnas del primer factor ha de coincidir con el número de filas del segundo factor y el resultado del producto es de orden el número de filas del primer factor por el número de columnas del segundo factor. Por lo tanto Si B.C es de orden 4x3, ya sabemos que B es de orden 4xa y C de orden ax3. Ahora bien, A.B.C es de orden 2x3, como BC es 4x3 A tiene que tener 4 columnas, y 2 filas. A es 2x4

18. Hallar, si existe, una matriz X que verifique la ecuación B^2X-BX+X = B, siendo B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN

Sacamos factor común a X en el primer miembro: $(B^2-B+I_2)X = B$
Si B^2-B+I_2 tiene inversa, multiplicando a la izquierda por la inversa, resulta que
$X= (B^2-B+I_2)^{-1}B$

$C = B^2-B+I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ cuyo det es 21, no nulo, por tanto tiene inversa que es: $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto $X = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

19. Se consideran dos matrices A y B que verifican A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular $A^2 - B^2$ (Santiago, junio 2003)

SOLUCIÓN:
Hay que tener presente que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$ pero $AB \neq BA$ por lo que en matrices no se verifica la igualdad $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
Lo más rápido es calcular A y B resolviendo el sistema A+B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ y A-B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sumando ambos miembros $2A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
Restando ambos miembros $2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$: $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 - B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 55 & 25 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 62 & 26 \\ 33 & 38 \end{pmatrix}$

20. Calcular por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante. (Santiago, junio 2003)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{2+a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{2+b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{2+c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+a+b+c & b & c \\ 2+a+b+c & 2+b & c \\ 2+a+b+c & b & 2+c \end{vmatrix} = (2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 2+b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & 2+c \end{vmatrix} + (2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b & c \\ 1 & b & 2+c \end{vmatrix} =$$

$$(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(2+\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c})$$

21. Demostrar que la matriz A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo A^2 + mA + nI = 0. Determinando m y n (I denota la matriz identidad). Utilice este hecho para calcular la inversa de A. (Santiago, junio 2003)

De la igualdad $A^2 + mA + nI = 0$, se obtiene m = -4, n = 3.

Multiplicando por A^{-1}, se obtiene $A + mI + nA^{-1} = 0$ de donde $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

22. Demostrar que toda matriz cuadrada de orden 3 se puede escribir como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. (Santiago, junio 2004)

En efecto: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{b+d}{2} & \frac{e}{2} & \frac{f+h}{2} \\ \frac{c+g}{2} & \frac{f+h}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b-d}{2} & \frac{c-g}{2} \\ -\frac{b-d}{2} & \frac{e}{2} & \frac{f-h}{2} \\ -\frac{c-g}{2} & -\frac{f-h}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Que son simétrica y antisimétrica respectivamente

23. Determinar, empleando el método de Gauss, para hallar el rango de la matriz (Santiago, junio 2004)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 1\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 2\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} 3\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Paso 1}\begin{cases} F1 = -2.F4 + F1 \\ F2 = -F3 + F2 \\ F3 = -3F4 + F3 \end{cases} \quad \text{Paso 2}\begin{cases} F1 = -3F3 + F1 \\ F2 = -F4 + F2 \\ F2 = F2/-2 \end{cases} \quad \text{Paso 3}\begin{cases} F1 = 7F2 + F1 \\ \end{cases}$$

Rango es el número de filas no nulas, es decir 3.

24. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$ Hallar una matriz X tal que AX+B=0
(Santiago, septiembre 2004)

$|A| = -5$; A tiene inversa que es: $\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $X = -A^{-1}.B = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

25- Hallar todas las matrices A = (a_{ij}), cuadradas de orden 3, tales que $a_{21} = a_{32} = 0$ y $A + A^t = 4I$, siendo I la matriz identidad de orden tres y A^t la matriz traspuesta de A, de las que además se sabe que su determinante vale 10. (Santiago, junio 2005)

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ de esta igualdad tenemos que

$a_{11} = 2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 2$. Por otra parte tenemos que $a_{13} + a_{31} = 0$; $a_{31} = -a_{13}$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a_{13} \\ 0 & 2 & 0 \\ -a_{13} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$; $8 + 2a_{13}^2 = 10$: $a_{13} = \pm 1$

Las matrices pedidas son : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

26. Dadas la matrices A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y B = (0 -1 -1) Se pide:

Calcular los valores del parámetro m para los que A tiene inversa.
Para m = 0. Calcula A^3 y A^{25}.
Para m = 0, calcula la matriz X que verifica X.A = B (Santiago, junio, 2006)

$|A| = m^2 - 1 = 0$; $m = \pm 1$. Para m = 1 y para m = -1 la matriz no tiene inversa.

Para m = 0. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

$A^{25} = (A^3)^8 . A = (-I)^8 . A = I.A = A$

Si XA = B, X = B.A^{-1} = (0 -1 -1).$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1\ 0\ 1)$

27. a) Sean A, B y C tres matrices tales que el producto A.B.C es una matriz 3x2 y el producto A.C^t es una matriz cuadrada. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.
b) Dada M = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices X que conmutan con M, es decir, verifican XM = MX.
c) Calcula la matriz Y que verifica M.Y + M^{-1}.Y = I, siendo I la matriz unidad de orden 2.
(Santiago, septiembre 2006)

a) Si A.B.C. es 3x2, sabemos que A es 3xp y que C es qx2 B es pxq

C^t es 2xq. Como A.C^t es cuadrada y es 3xq, implica que q =3 y para que exista A.C^t se tiene que verificar que p = 2. Conclusión: A es 3x2, B es 2x3 y C es 3x2

b) Sea X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{cases} b-a=-a \\ -b=-b \\ d-c=a-c \\ -d=-d \end{cases}$ $b=0 \ \ y\, d=a$ Las matrices pedidas son $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ donde a, c son reales.

c) (M + M^{-1})Y = I; Y = (M + M^{-1})$^{-1}$

$M^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ M + M^{-1} = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Y = (M + M^{-1})$^{-1}$=$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS PROPUESTOS

***Ejercicio 1**.-* Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3, con det (M) = -2. Calcular el valor del determinante de la matriz que tiene por filas F_1-F_2, $2F_1$, $F_2 + F_3$. (Santiago, junio 2007)

***Ejercicio 2**.-* Dada la matriz C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifican: $\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$ siendo C^t la matriz traspuesta de C. (Santiago, junio 2007)

***Ejercicio 3**.-* Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ Se pide:

Estudiar el rango de A, en función de los valores de m.

Para m = -1, calcular la matriz X que verifica X.A + A = 2I. siendo I la matriz unidad de orden 3. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 4.- Dada la matriz A = A = $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ Se pide

a) Calcular los valores de m para los A tiene inversa.
b) Para m = 1, calcula la matriz X que verifica X.A + X – 2A = 0 (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 5.

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz M = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -m & m \end{pmatrix}$
b) Para el valor m = 1, resuelve la ecuación matricial MX = 3^{at}, siendo A = (1 0 1). Para este valor de m, ¿cuánto valdrá el determinante de la matriz $2M^{21}$? (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6.

a) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula los rangos de AA^t y de A^tA, siendo A^t la matriz traspuesta de A. Para el valor de a = 1, resuelve la ecuación matricial AA^tX = B, siendo B= $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 con det (M) = -1 y que además verifica M^3+M+I = 0, siendo I la matriz unidad de orden 3. Calcula los determinantes de las matrices M+I y 3M+3I (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 7.

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & m+2 \\ m & 8 & 12 \end{pmatrix}$
b) Resuelve la ecuación matricial A^2X = B, siendo A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 8. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Si I es la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de m para los que A+mI no tiene inversa. Calcula, si existe, la matriz inversa de A-2I.

b) Calcula la matriz X tal que $XA+A^t = 2X$. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 9.

a) Pon un ejemplo de matriz simétrica de orden 3 y otro de matriz antisimétrica de orden 3.

b) Sea M una matriz simétrica de orden 3, con det (M) = -1. Calcula, razonando la respuesta, el determinante de $M + M^t$, siendo M^t la matriz traspuesta de M.

c) Calcula una matriz X simétrica de rango 1 que verifique: $X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 10.

a) Sean C1, C2, C3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada M de orden 3 con det (M) = -4. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, -C2, 2C1-C3, C2+C3.

b) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula todos los valores de a y b para los que $A^{-1} = A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 11.

a) Si A es una matriz tal que $A^3+I = 0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula de orden 3, ¿cuál es el rango de A?. Calcula el determinante de A^{30}. Calcula A en el caso de que sea una matriz diagonal verificando la igualdad anterior.

b) Dada la matriz B = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula una matriz X tal que $BXB = B - B^{-1}$ (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 12. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de m, el rango de la matriz A.

b) Resuelve, si es posible, el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para m = 1. (Santiago, junio, 2012)

Ejercicio 13

c) Calcula, según los valores de a, el rango de A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a+1 & a & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ Para a = 1, calcula el determinante de la matriz $2.A^t.A^{-1}$

d) Sea B=$\begin{pmatrix} -1/2 & x & 0 \\ y & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula x e y para que se cumpla que $B^{-1} = B^t$.

Ejercicio 14. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. B=$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

e) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t + \lambda I$
f) Calcula la matriz X que verifica $AB^tX\text{-}X = 2B$. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 15.

g) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $M^2 = 4M$. Determina la matriz X que verifica la ecuación matricial $(M\text{-}2I)^2X = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.
h) Determina todas las matrices B de la forma $\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$ que verifiquen $B^2 = 4B$. Si alguna es inversible, calcula su inversa.
i) ¿Cuándo un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo? ¿Puede ser incompatible un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Justifica la respuesta. (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 16.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}m & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & m\end{pmatrix}$

j) Calcula, según los valores de m, el rango de A
k) ¿Coincide A con su inversa para algún valor de m? Para m = 0, calcula A^{60}
l) si m = 2 y A es la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, ¿podemos afirmar que el sistema tiene solución única? Justifica la respuesta. (Santiago, septiembre 2013)

TEMA II

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición:
Un sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas, es una expresión de la forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}$$

donde a_{ij} son los coeficientes reales del sistema, los x_j son las incógnitas del sistema y los b_i son los términos independientes.

Las operaciones con matrices nos permiten escribir un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial de la siguiente manera: AX = B, siendo

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ matriz principal o de coeficientes, de orden nxp; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ matriz de incógnitas de orden px1; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ matriz de términos independientes de orden nx1 ; la matriz A ampliada con la columna de B, se llama matriz ampliada y se representa por $(A|B)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} 2x+3y-4z=2 \\ x+y+z=1 \\ -3x-2y-z=0 \end{cases}$ se escribe en matricial así: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definición:
Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en:

$$\begin{cases} \textbf{Compatibles (tienen solución)} \begin{cases} \textbf{Determinado (solución única) SCD} \\ \textbf{Indeterminado (infinitas soluciones) SCI} \end{cases} \\ \textbf{Incompatibles (sin solución) SI} \end{cases}$$

31

Sistema homogéneo

Definición: Si la matriz de términos independientes, B, es 0, el sistema se llama homogéneo. Todo sistema homogéneo es compatible. Al menos tiene la solución X = 0

***Sistema de Cramer*:**

Un sistema de ecuaciones lineales se llama sistema de Cramer, si el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y el determinante de la matriz principal no es nulo.

Dicho de otro modo, un sistema de ecuaciones lineales AX = B, es de Cramer si y solo si A es cuadrada y $|A|\neq 0$

PROPOSICIÓN:

Un sistema de Cramer siempre es compatible determinado (tiene una única solución)
En efecto, si $|A|\neq 0$, existe A^{-1}
Multiplicando AX=B por la izquierda por A^{-1}, obtenemos que $X = A^{-1}B$, que es la solución buscada.

Método de Cramer para resolución de sistemas de Cramer.-

Aparte del método matricial apuntado anteriormente, donde interviene la matriz inversa, se puede demostrar que la incógnita x_i de un sistema de Cramer, es el cociente entre el determinante de la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i en A por la columna B, entre el determinante de A.

Ejemplo: Dado el siguiente sistema, comprobar que es de Cramer y resolverlo por matrices inversas y por el método de Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = -4 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; $|A| = 8$. Calculamos su adjunta $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Trasponemos la adjunta $\overline{A}^{\,t} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ x = 1, y = 2, z =3

Resolvámoslo ahora por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{24}{8} = 3$$

Es fundamental el dominio del método de Cramer, pues todo sistema compatible habrá que reducirlo a uno de Cramer para su resolución.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS (Caracteriza los sistemas de ecuaciones lineales según su número de incógnitas)

Dado un sistema de n ecuaciones y p incógnitas $AX = B$

a) Si rango (A) = rango $(A|B)$ = nº incógnitas (p), el sistema es compatible determinado (tiene una única solución)
b) Si rango (A) = rango $(A|B) <$ nº incógnitas (p), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)
c) Si rango (A) ≠ rango $(A|B)$, el sistema es incompatible (no tiene solución)

Los sistemas de Cramer se incluyen todos en el caso a) puesto que al ser el número de ecuaciones igual al de incógnitas (n) y $|A|\neq0$, el orden del mayor menor complementario que obtenemos es n, puesto que ese menor complementario es el determinante de la propia matriz A y la ampliada A|B es de orden nx(n+1) y por tanto su rango sigue siendo n.

Demostración del Teorema:
Para su demostración, indicaré la matriz A por columnas, del siguiente modo:
A $(C_1\ C_2\ldots C_p)$ siendo $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. El sistema entonces se podrá escribir del siguiente modo: $C_1x_1+ C_2x_2+ C_3x_3+\ldots C_px_p=B$

Demostración a)
Si rango (A) = rango (A|B) = p ⇒ rango $(C_1\ C_2\ldots C_p)$ = rango $(C_1\ C_2\ldots C_p\ B)$. Como el rango es el número máximo de columnas linealmente independientes, eso quiere decir que la columna B es dependiente de las demás, por tanto:
$C_1\alpha_1+ C_2\alpha_2+ C_3\alpha_3+\ldots C_p\alpha_p=B$, de donde hemos obtenido una solución del sistema que sería $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p)$. Además esta solución es única.
Supongamos que tuviésemos otra solución del sistema, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p)$., esto implicaría que $C_1\beta_1+ C_2\beta_2+ \ldots +C_p\beta_p=B$. Como teníamos que $C_1\alpha_1+ C_2\alpha_2+ C_3\alpha_3+\ldots C_p\alpha_p=B$, restando ambas expresiones, obtenemos $C_1(\beta_1- \alpha_1)+C_2(\beta_1- \alpha_1)+ \ldots +C_p(\beta_1- \alpha_1) = 0$, puesto que rango $(C_1\ C_2\ldots C_p)$ = p, las p columnas son linealmente independientes, por lo cual, según la definición de linealmente independientes, los escalares de la combinación lineal anterior deben ser 0; es decir $\beta_1- \alpha_1 = \beta_2- \alpha_2 = \ldots = \beta_p- \alpha_p = 0$
$\beta_1 = \alpha_1$; $\beta_2 = \alpha_2$; $\beta_3 = \alpha_3$; … $\beta_p = \alpha_p$. Con lo cual demostramos que la solución es única y por tanto el Sistema es Compatible determinado.
Demostración b)
Si rango (A) = rango (A|B) = r < p ⇒ rango $(C_1\ C_2\ldots C_p)$ = rango $(C_1\ C_2\ldots C_p\ B)$ = r
Esto quiere decir que B puede escribirse como combinación de r columnas linealmente independientes de varias formas puesto que r <n. Entonces el sistema tiene más de una solución y es compatible indeterminado.
Demostración c) Si los rangos son distintos el sistema es incompatible, puesto que si fuese compatible B se podría escribir en c.l. de los C_i y por tanto la columna B no haría

variar el rango de la matriz principal, por lo que los rangos serían iguales. Así pues el sistema es incompatible.

Veamos algunos ejemplos: Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \\ 4x-y-3z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ su orden es 4x3}$$

Tomamos el menor complementario $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es -4, por tanto el orden del mayor menor complementario hallado en A es 3, es decir el rango(A)=3.

Veamos ahora el rango de $(A|B)$ que es una matriz 4x4, con lo que puede tener rango 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

F1=3F3+F1 ; F2=-2F3+F2

En consecuencia el rango de $(A|B)$ es 3.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, rango(A) = rango (A|B) = 3 = nº incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene solución única.

¿Cómo se resuelve? Hay que reducirlo a un sistema de Cramer equivalente. Para ello es fundamental el menor complementario hallado para determinar el rango de A, pues este menor se va a convertir en la matriz principal (todo menor complementario es cuadrado de det no nulo). Como en dicho menor se omite la última ecuación (porque es dependiente de las demás y no aporta ninguna información nueva al sistema), prescindimos de ella, es decir que el sistema de Cramer equivalente al dado sería:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

Que resolviéndolo por el método de Cramer, obtendríamos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1 \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1 \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-4}=1$$

Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ A es de orden 2x3 y A|B 2x4. A lo sumo ambas tienen rango 2. Veamos si encontramos algún menor complementario de orden 2 con determinante no nulo. Vemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ =1 ≠0. por tanto rango(A)=2 y rango(A|B) = 2.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius los rangos coinciden pero su valor es menor que el número de incógnitas, por tanto estamos en el caso b) Sistema compatible indeterminado.

La resolución es la siguiente: Se trata de encontrar el sistema de Cramer equivalente. Como en el caso anterior, la nueva matriz principal será el menor complementario que ha determinado rango 2, es decir $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Ahora es la columna de la incógnita z, la que no tenemos en la matriz. En este caso dicha columna pasa a formar parte de los términos independientes, dando a z el valor de un parámetro que al variar irá obteniendo las distintas soluciones del sistema. Es decir que el sistema de Cramer[1] equivalente es:

$$\begin{cases} x + y = 2 + \lambda \\ 2x + 3y = 4\lambda \end{cases}$$

que ya podemos resolver:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 \\ 4\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 6 - \lambda \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\lambda \\ 2 & 4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 2\lambda - 4 \qquad z = \lambda$$

Al darle valores a λ, vamos obteniendo soluciones del sistema.
Ejemplo (6, -4, 0); (5, -2, 1), (7, -6, -1) …. etc.

Para comprobar que está correctamente resuelto, podemos sustituir cualquiera de estas soluciones en el sistema de partida (no en el de Cramer) y comprobar que satisfacen las ecuaciones dadas.

Estudiar el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ El rango de A no es 2, pues todo menor complementario de orden 2 que tomemos en A tiene determinante nulo. Por tanto rango(A) = 1.Como menor complementario de orden 1, valdría cualquier elemento de A.

Ahora bien Veamos si encontramos algún menor de orden 2 con determinante no nulo en la matriz ampliada. En efecto si tomamos $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ vemos que es no nulo, por tanto rango (A|B) = 2. Por el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible, es decir que no tiene solución.

[1] El Sistema de Cramer equivalente no tiene porque ser único. Va a depender del menor complementario elegido a la hora de determinar la igualdad de rangos que nos hacen el sistema compatible.

Método de Gauss de resolución de Sistemas

Consiste en hacer ceros por debajo de la matriz ampliada utilizando combinaciones lineales de filas hasta que el proceso no pueda continuar y llegar a un sistema equivalente de inmediata o fácil resolución.

Veamos un ejemplo. Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4/3 \end{array}\right)$$

F2=(-2)F1+F2 F3=(-2/3)F2+F3

F3=(-1)F1+F3

Hemos llegado al sistema escalonado siguiente:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y-5z=-8 \\ 4/3z=4/3 \end{cases}$; de donde resolviendo directamente, z =1 ; y = 1; x = 1

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Estudiar el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y + z = 2a} \\ \boldsymbol{x - y + z = a - 1} \\ \boldsymbol{x + (a-1)y + az = a + 3} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para a = -1

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + a + 1 = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a-1)$$

Este determinante se anula para a= -1/2, a = 1.
Estudiamos los siguientes casos:
Caso a = -1/2.

$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} -1/2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & 7/2 \end{vmatrix} = -13/8 \neq 0$, por tanto rango A|B = 3.

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Caso a = 1

A|B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ rango A = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ rango (A|B) = 3

Aplicando el Teorema de Rouché-Fróbenius, el sistema es incompatible.

En caso de que a ≠ -1/2 y a ≠ 1, rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado.

Para a = -1, dado que estamos en el último caso, el sistema es compatible determinado y además es un sistema de Cramer. Por tanto puede resolverse por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = -2$$

2.- Estudiar el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + ay + z = 3a} \\ \boldsymbol{x - y + z = 2} \\ \boldsymbol{ax + y = 4a} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para a = 2.

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a+1)$ Se anula para a = 0 y a = -1

Estudiamos los siguientes casos:

Caso a = 0

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por tanto rango A|B = 3.

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Caso a = -1

A|B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ rango A = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ entonces rango (A|B) = 3

Aplicando el Teorema de Rouché-Fróbenius, el sistema es incompatible.

38

Nos queda el caso en que a ≠ 0 y a ≠ -1

Ambos rangos coinciden y el sistema es compatible determinado.

Caso a = 2.   Estamos en el último caso y además el sistema es de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6&2&1\\2&-1&1\\8&1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&0\end{vmatrix}}=10/3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&6&1\\1&2&1\\2&8&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&0\end{vmatrix}}=4/3 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&6\\1&-1&2\\2&1&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&0\end{vmatrix}}=0$$

3 .- Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x+y+(a+1)z=1}\\ \boldsymbol{ax=2}\\ \boldsymbol{ax+2z=0}\end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a+1\\a&0&0\\a&0&2\end{vmatrix}=-2a$$ Se anula para a = 0

Estudiamos los siguientes casos:
Caso a = 0

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ cuyo rango es 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}$= 2 ≠ 0

En cuanto a la matriz ampliada

$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{pmatrix}$ veamos si su rango puede ser 3. Para ellos tomamos el menor:

$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{vmatrix}$ = 0, $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}$ = -4 ≠ 0 por tanto rango A|B = 3.

El sistema es incompatible.

Caso a ≠ 0
El sistema es compatible determinado, puesto que rang (A|B) = rang (A) = 3

Es además un Sistema de Cramer. La solución es (en función de a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-2a} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-(a-1)(a+4)}{-2a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2a}{-2a} = -1$$

4. Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 5} \\ \boldsymbol{y + z = a} \\ \boldsymbol{x - 2z = 3} \\ \boldsymbol{2x - 3z = a} \end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el rango de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

A lo sumo puede ser 3. Estudiamos los menores de orden 3:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = -3 ≠ 0. Por tanto rango (A) = 3.

$$|A|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a + 20$$

Si a = -10, el rango de (A|B) = 3. En caso contrario es 4. Por tanto el sistema solamente es compatible cuando a = 10.

Para resolverlo hay que buscar sus Sistema de Cramer equivalente. Para eso nos fijamos en el menor hallado para determinar la igualdad de rangos y vemos que es $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ = -3 que se corresponde con las ecuaciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 5} \\ \boldsymbol{y + z = 10} \\ \boldsymbol{x - 2z = 3} \end{cases}$$

Que resulta ser el Sistema de Cramer buscado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = 11 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = 6 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = 4$$

5 Estudiar y resolver el sistema de ecuaciones lineales en función de k:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + y + z = 1} \\ \boldsymbol{x + ay + z = 1} \\ \boldsymbol{x + y + az = -2} \end{cases}$$

Estudiamos en primer lugar el rango de A.

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$. Se anula para a=1 y a= -2

Caso a = 1 rango (A) = 1 (obvio) ; rango (A|B) = 2 por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= -2 ≠ 0
Sistema incompatible.

Caso a = -2 rango (A) = 2, pues tenemos el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= 3 ≠ 0 y

A|B = $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ rango (A|B) = 2 pues todos los menores de orden 3 son nulos.

Sistema compatible indeterminado. La solución pasa por buscar el sistema de Cramer equivalente. Para eso nos fijamos en el menor complementario hallado para determinar el rango de A que era $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$= 3 ≠ 0 . Las columnas de ese menor se corresponden con las ecuaciones 1ª y 2ª del sistema y las filas se corresponden a las incógnitas x e y. Por tanto prescindimos de la tercera ecuación y la incógnita z pasa a formar parte de los términos independientes. Esto es, llamamos z = α y el sistema de Cramer que buscamos es:

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \alpha \\ x - 2y = 1 - \alpha \end{cases}$$

Resolviéndolo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1-\alpha & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \alpha - 1 \; ; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-\alpha \\ 1 & 1-\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \alpha - 1 \; : \; z = \alpha$$

Caso a ≠ 1 y a≠ -2 los rangos de A y A|B coinciden y su valor es 3.
El sistema es compatible determinado:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\-2&1&a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}}=\frac{a(a+1)}{(a-1)^2(a+2)};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&1&1\\1&-2&a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}}=\frac{(a-1)(a+2)}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{1}{(a-1)};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}}=\frac{-2}{(a-1)}$$

6. A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases}3x-ky=3\\y+3z=6\\x+kz=5\end{cases}$ para el valor del parámetro k que él desee. Obtiene, correctamente para dicho valor, que el sistema es compatible indeterminado, y que una expresión de las soluciones en forma paramétrica es x = 1 + 2t , y =…, z = … Determina para qué valor del parámetro k ha clasificado y resuelto el sistema, y calcula las expresiones de las incógnitas “y” y “z” que le faltan.

$\begin{vmatrix}3&-k&0\\0&1&3\\1&0&k\end{vmatrix}$ = 0 ; rango (A) = 2 pues vale el menor $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}$= -1 ≠ 0

A|B = $\begin{pmatrix}3&-k&0&3\\0&1&3&6\\1&0&k&5\end{pmatrix}$. Tomamos los menores: $\begin{vmatrix}3&-k&3\\0&1&6\\1&0&5\end{vmatrix}$= -6k +12 ;

$\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&3\\1&k&k\end{vmatrix}$= 0. Con lo cual, el rango de A|B es 2 si y solo si k = 2.

El único caso en que el sistema es compatible indeterminado es cuando k =2.

El sistema de Cramer equivalente es el que se obtiene a partir del menor $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}$= -1 ≠ 0, cuyas filas se corresponden con las ecuaciones segunda y tercera, y las columnas con las incognitas x e y. Prescindimos de la primera ecuación y la incógnita z pasa a formar parte de los términos independientes:

$\begin{cases}y=6-3\alpha\\x=5-2\alpha\end{cases}$ z = α

Puesto que en la solución hallada x = 1 + 2t ; 1 + 2t = 5 -2 α; de donde $\alpha=2-t$
Por tanto y = 6 – 3(2-t) = 3t y z = 2-t

7. Calcular α para que el siguiente sistema homogéneo tenga más soluciones que la trivial. Resolverlo para dicho valor de α y dé una interpretación geométrica del sistema de ecuaciones y de su solución.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y-z=0} \\ \boldsymbol{2x+y-\alpha z=0} \\ \boldsymbol{x-y-z=0} \end{cases}$$ **(Santiago, septiembre 2001)**

En efecto se trata de un sistema homogeno que siempre es compatible. El valor de α buscado es el que nos haga el sistema compatible indeterminado, es decir, rango A <3

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -\alpha \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 3\alpha$. Se anula para α =2. Por tanto el rango en este caso será 2, basta tomar el menor complementario $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= -3 ≠ 0

El sistema de Cramer equivalente es: $\begin{cases} x+2y=t \\ 2x+y=2t \end{cases}$ z = t

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 2 \\ 2t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = t \; ; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 0 \; : \; z = t$$

A la vista de la solución, para α=2 estamos ante tres planos que se cortan en una recta de ecuaciones parámetricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

8. **¿Es compatible determinado el sistema de ecuaciones** $\begin{cases} \boldsymbol{3x+2z=2} \\ \boldsymbol{5x+2y=1} \\ \boldsymbol{x-2y+4z=3} \end{cases}$ **Justifique la respuesta. Como consecuencia de la respuesta anterior, justifique si tiene una, ninguna o más de una solución este sistema.**

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$=0, por tanto rango(A) =2. Nos vale el menor $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$= 6 ≠ 0

Para averiguar el rango de la ampliado tomamos los menores:

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto tiene más de una solución, y en ningún caso es compatible determinado.

9. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según el valor de a y resolverlo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=a-1} \\ \boldsymbol{ax+2y+z=a} \\ \boldsymbol{x+y+az=1} \end{cases}$$ **(Santiago septiembre 2002)**

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$= -($a$-1)($a$-2). Se anula para a = 1 y para a = 2

Caso a = 1, rango (A) = 2.
Para averiguar el rango de la ampliado tomamos el menor:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; rango (A|B) = 3. El sistema es incompatible.

Caso a = 2, rango (A) = 2. Con el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$= -1 ≠ 0
Para averiguar el rango de la ampliada tomamos los menores
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2 . El sistema es compatible indeterminado. Para resolverlo buscamos el Sistema de Cramer equivalente. El menor elegido en A para determinar rango 2, se corresponde con las dos primeras ecuaciones y las incógnitas y, z. Por tanto x pasa a formar parte del término independiente y prescindimos de la tercera ecuación. El sistema de Cramer equivalente es:
$\begin{cases} y+z=1-\alpha \\ 2y+z=2-2\alpha \end{cases}$ con x = α

$$x=\alpha\,; y=\frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 2-2\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=1-\alpha\ :\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 2 & 2-2\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=0$$

10. Discutir e interpretar geométricamente, según el parámetro a, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x-y=ax} \\ \boldsymbol{5x+y+2z=ay} \\ \boldsymbol{4y+3z=az} \end{cases}$$

(Santiago, septiembre 2003)

$\begin{vmatrix} 3-a & -1 & 0 \\ 5 & 1-a & 2 \\ 0 & 4 & 3-a \end{vmatrix} = a(3-a)(a-4)$ Se anula para a = 0, 3, 4

Hay que tener en cuenta que se trata de un sistema homogéneo y por tanto siempre es compatible:
Caso a = 0; Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$= 8 ≠ 0. S.C. indeterminado:

Caso a = 3; Rango (A) =2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. S.C. indeterminado

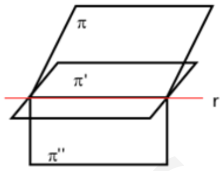
Caso a = 4; Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ S.C. indeterminado

Caso a ≠ 0, 3, 4; Rango (A) = 3. S.C.D.

En cuanto a la interpretación geométrica tenemos lo siguiente:

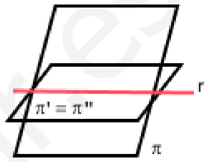
Caso a = 0

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + y + 2z = 0 \\ 4y + 3z = 0 \end{cases}$$ Son 3 planos que se cortan en una recta



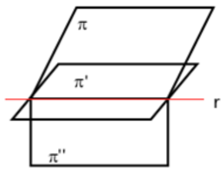
Caso a = 3

$$\begin{cases} y = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ 2 planos iguales y el tercero cortándolo en una recta



Caso a = 4

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$ Son 3 planos que se cortan en una recta



Caso a ≠ 0, 3, 4.- Son 3 planos que se cortan en un punto

11. Hallar tres números sabiendo que el primero menos el segundo es igual a un quinto del tercero, si al doble del primero le restamos seis resulta la suma del segundo y el tercero y, además, el triple del segundo menos el doble del tercero es igual al primero menos ocho. (Santiago, junio 2004)

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{5}z \\ 2x - 6 = y + z \\ 3y - 2z = x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 5y - z = 0 \\ 2x - y - z = 6 \\ -x + 3y - 2z = -8 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Rango A = 3. Sistema Compatible determinado. Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \\ -8 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = 22 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -1 & -8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = 18 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}} = 20$$

12. Determinar los coeficientes del polinomio de grado dos tal que su gráfica pasa por los puntos (0, 5), (1,7) y (-1,5). ¿Puede haber otro polinomio de segundo grado, que pase por esos tres puntos? Razone la respuesta. (Santiago, septiembre 2004)

Sea el polinomio buscado $ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} c = 5 \\ a+b+c = 7 \\ a+5b+c = 5 \end{cases} \quad \text{Es un sistema de Cramer pues } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Es un sistema compatible determinado.

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 5/2 \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 1/2 \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = 5$$

La solución es única por lo tanto no puede haber otra parábola que contenga a esos tres puntos.

13. Discutir e interpretar geométricamente, según los diferentes valores del parámetro m, el siguiente sistema: (Santiago, junio 2005)

$$\begin{cases} -x+y-z = -1 \\ 4x-2y+2z = 2m \\ -3x-2y+mz = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m+4 \text{ Se anula para m = 2}$$

Caso m ≠ 2. Rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado

Solución única y son tres planos que se cortan en un punto.

Caso m = 2. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ = -2 ≠ 0

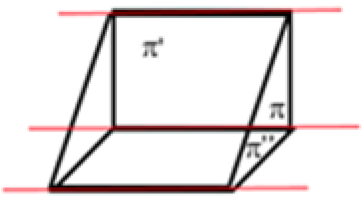
Para el estudio del rango de la ampliada, tomemos los menores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

rango (A|B) = 3.

Sistema incompatible

Tres planos que se cortan dos a dos en una recta:



14. Discutir e interpretar geométricamente, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{2x-y+z=0} \\ \mathbf{x-2y+z=m} \\ \mathbf{mx-y+z=0} \end{cases}$$

Resolverlo si es posible para m = 0 y para m = 2. (Santiago, junio 2006)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2$$

Caso m ≠2. Rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado. Se trata de tres planos que se cortan en un punto.

Caso m =2. Rango (A) = 2 Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Para el estudio del rango de la ampliada, tomemos los menores:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

rango (A|B) =2. Sistema compatible indeterminado.

Se trata de dos planos iguales y un tercero cortándolos en una recta.

Vamos a resolverlo para m = 0. Sabemos que el SCD. El sistema es homogéneo, por lo tanto la solución es x = y = z = 0

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ \quad -y + z = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos para m = 2

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

. Como es SCI, buscamos el Sistema de Cramer equivalente con el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ que se corresponde con las dos primeras ecuaciones y las incógnitas x e y. Prescindimos de la tercera ecuación y la incógnita z pasa a dársele el valor de un parámetro y a formar parte de los términos independientes. De este modo, el sistema de Cramer equivalente es:

$$\begin{matrix} 2x - y = -\alpha \\ x - 2y = 2 - \alpha \end{matrix} \quad \text{con } z = \alpha$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha & -1 \\ 2-\alpha & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-\alpha - 2}{3} \ ; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\alpha \\ 1 & 2-\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha - 4}{3} \ : \ z = \alpha$$

Que son las ecuaciones paramétricas de la recta en la que se cortan los tres planos.

15. Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo para m = 0

$$\begin{cases} \boldsymbol{y + mz = 0} \\ \boldsymbol{x + mz = 0} \\ \boldsymbol{mx - y = m} \end{cases}$$ **(Santiago, septiembre 2006)**

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - m$; Se anula para m = 0 y m = 1

Caso m = 0. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Para la ampliada, tomamos:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ rango (A|B) = 2.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos hallando el sistema de Cramer equivalente que es:

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ z = t. Solución obvia.

Caso m = 1. Rango (A) = 2. Tomamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Para la ampliada, tomamos:

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ rango (A|B) = 3. Sistema incompatible

Caso m≠0 y m≠1 rango (A) = rango (A|B) = 3. Sistema compatible determinado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$mx + y + z = 0$$
$$x - my - z = 1$$
$$2x + y + z = 0$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 2   (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 2.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x + my + mz = 1$$
$$x + my + mz = m$$
$$my + mz = 4m$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 1. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 3.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuación lineales:

$$2x + 3y + z = m$$
$$x - 2y + z = 2$$
$$3x + y + 2z = 1$$

b) Resuélvelo si es posible, para el caso m = -1   (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 4.-

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuación lineales:

$$3x - y - 3z = m$$
$$x + y - z = 1$$
$$mx + 3y + 2z = 3$$

b) Resuélvelo si es posible, para el caso m = 0   (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 5.

a) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

b) Calcula el valor de m, para que al añadir al sistema anterior la ecuación:

$$x + 2y - z = m$$

resulte un sistema compatible indeterminado.   (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 6.

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{gathered}
x - y + z = 0 \\
2x - y - z = 0 \\
x - 2y + 4z = m
\end{gathered}
$$

b) Resolverlo, si es posible, para m = 0 (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 7

a) Discute, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{gathered}
ax + 2y + 2z = a \\
x + y + z = 0 \\
2x - y + 2z = a
\end{gathered}
$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso a = 0. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 8

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
mx + y - 2z = 0 \\
x + y + z = 0 \\
x - y + z = m
\end{gathered}
$$

b) Resolverlo, si es posible, en los casos m = 0 y m = -1 (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 9

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
mx - 2y + 2z = 1 \\
2x + my + z = 2 \\
x + 3y - z = m
\end{gathered}
$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = -1 (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 10

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{gathered}
x + my + 3z = 1 \\
x + 2y + mz = m \\
x + 4y + 3z = 1
\end{gathered}
$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 4 (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 11. Dado el sistema

$$
\begin{cases}
x - 2y + 3z = 5 \\
x - 3y + 2z = -4
\end{cases}
$$

a) Calcula el valor de a para que al añadirle la ecuación ax + 3y + z = 9, resulte un sistema compatible indeterminado. Resuélvelo, si es posible para a = 0.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema con estas tres ecuaciones no tenga solución? (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 12

a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} x + y = m \\ x - my = -13 \\ 3x + 5y = 16 \end{gathered}$$

b) Resolverlo, si es posible, en el caso m = 2 (Santiago, septiembre 2012)

TEMA III

EL ESPACIO VECTORIAL V3

VECTORES EN EL ESPACIO.

Definición.- Sea E_3 el espacio intuitivo formado por puntos. Se define **vector fijo** de extremos A y B, al segmento orientado **AB**.
Denominamos modulo de **AB**, al valor |**AB**| que determina la longitud del segmento (previa determinación de una unidad de medida).
Dirección de **AB** es la recta que contiene al segmento AB y todas sus paralelas.
Sentido de **AB** indica donde comienza el vector (A punto origen) y donde finaliza (B punto extremo).
El vector se simboliza gráficamente mediante una flecha, cuya punta indica el punto extremo.

Todos los vectores citados en este trabajo, se indicarán mediante letra negrita. Otros textos lo designan con una flecha encima. Por economía de escritura omitiremos esta notación.

Definición.- Sea el conjunto de vectores fijos del espacio E_3. Definimos la siguiente relación:

$$\mathbf{AB} \text{ es equipolente a } \mathbf{CD} \text{ si y solo si: } \begin{cases} \mathbf{AB} \text{ y } \mathbf{CD} \text{ tienen el mismo módulo} \\ \mathbf{AB} \text{ y } \mathbf{CD} \text{ tienen la misma dirección} \\ \mathbf{AB} \text{ y } \mathbf{CD} \text{ tienen el mismo sentido} \end{cases}$$

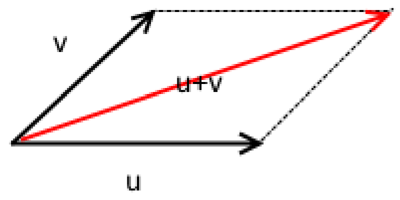
Esta relación es de equivalencia y clasifica al conjunto de vectores fijos en clases de equivalencia (todos los vectores equipolentes entre sí), denominadas **v**ectores libres.
El conjunto de vectores libres en el espacio, se representa por V3

Así pues, un vector libre es un conjunto infinito de vectores fijos que tienen todos las tres características (módulo, dirección y sentido) iguales. A la hora de trabajar con ellos, se elige un representante de dicho conjunto, independientemente de donde este su posición absoluta en el espacio como vector fijo. Este hecho lo permite moverse libremente por el espacio (basta cambiar el representante), de ahí su denominación.

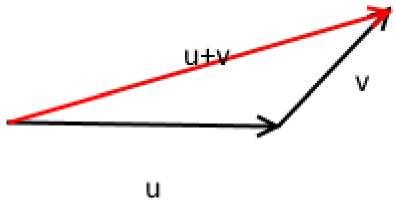
A partir de ahora, siempre que nos refiramos a un vector, será un vector libre, salvo que se indique lo contrario.

Operaciones con vectores:
Suma
Dados **u, v** ∈ V3

Se define **u + v** como un nuevo vector de V3. Gráficamente la suma se resuelve así:
a) Si **u** y **v** tienen el mismo punto origen (método del paralelogramo)



si **v** está a continuación de **u** (la suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo)



Propiedades de la suma:

1) Commutativa **u**+**v** = **v**+**u**, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V3$
2) Asociativa (**u**+**v**)+**w** = **u**+(**v**+**w**); $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V3$
3) Elemento neutro **0**; **u**+**0**=**u**. $\forall \mathbf{u} \in V3$. El vector nulo **0** es el representante de los fijos que tienen el mismo origen y el mismo extremo.
4) Elemento opuesto de **u**, **-u** / **u**+(-**u**) = **0**; $\forall \mathbf{u} \in V3$ el vector opuesto –**u**, difiere del vector **u**, solamente en el sentido que son opuestos. (la dirección y el módulo coinciden)

Producto por escalares.

Sea $\mathbf{u} \in V3$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{u}$ como un nuevo vector de V3, caracterizado por tener la misma dirección de **u**; el sentido de **u** se conserva si λ es positivo y es de sentido opuesto al de **u** si λ es negativo. El módulo se modifica en función del valor absoluto de λ**.** (Gráficamente **u** se expande o se contrae en un sentido u otro).

Propiedades de la suma y el producto escalar combinadas:

1) $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
2) $(\lambda + \lambda')\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \lambda'\mathbf{u}$ $\qquad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}; \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{V3}$
3) $(\lambda.\lambda')\mathbf{u} = \lambda(\lambda'\mathbf{u})$
4) 1.**u** = **u**

V3 con la suma y el producto por escalares tiene estructura de *Espacio Vectorial.*

Combinación lineal de vectores

Sean $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, **…** $\mathbf{u_n}$ vectores libres de V3. Se llama combinación lineal de los n vectores a la expresión siguiente:

$$\mathrm{a}_1\mathbf{u_1} + \mathrm{a}_2\mathbf{u_2} + \mathrm{a}_3\mathbf{u_3} + \ldots + a_n\boldsymbol{u_n} \qquad \text{donde } \mathrm{a_i} \in \mathbb{R}, \text{ con i=1…n}$$

Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots \mathbf{u_n}$ vectores libres de V3, se dice que son linealmente independientes si $a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + a_3\mathbf{u_3} + \ldots + a_n\boldsymbol{u_n} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_i = 0 \; \forall i = 1 \ldots n$

Sistema de generadores

Sea $\mathcal{S} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots \mathbf{u_n}\}$ vectores libres de V3. Se dice que $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de V3, si para cualquier vector **v**, este se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}$.

Base del espacio vectorial V3

Se llama base de V3 a un conjunto de vectores de V3 que sean simultáneamente linealmente independientes y sistema de generados.

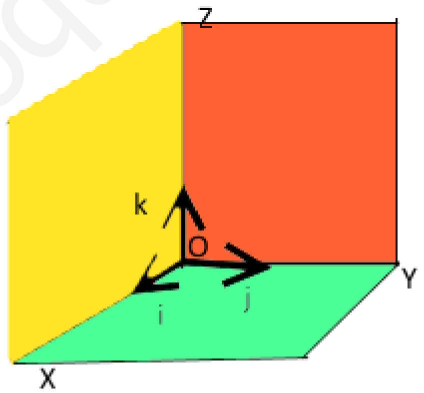
Sistema de referencia en el espacio E3

Se llama sistema de referencia ortonormal, al conjunto $\mathfrak{R}\,(0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\})$, donde O es un punto llamado origen y B es una base de V3.

Sistema de referencia ortonormal

Se llama así al conjunto $\mathfrak{R}\,(0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$ de modo que $|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}| = 1$ y $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{j}$. orto (perpendiculares entre sí) normales (de módulo 1 o unitarios).

El sistema de referencia ortonormal genera es sistema de ejes cartesianos tridimensional:



Coordenadas de un punto en un espacio de referencia ortonormal.

Sea el punto A en el espacio. Llamamos vector de posición del punto A, al vector **OA. Como** $B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$, es base, los vectores constituyen un sistema de generadores, lo cual quiere decir que el vector **OA** puede escribirse en combinación lineal de **i, j** y **k**, esto es:

$$\mathbf{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \text{siendo } a_i \in \mathbb{R}$$

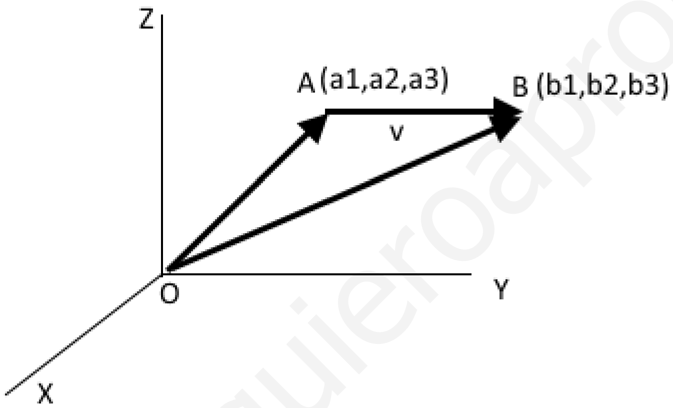
Veamos que esta expresión es única para **OA**.

Supongamos que **OA** = $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

Restando miembro a miembro ambas expresiones, resulta que $\mathbf{0} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$. Puesto que **i, j** y **k** son linealmente independientes por ser base, los escalares han de ser 0 : $a_1 - b_1 = 0;\ a_2 - b_2 = 0; a_3 - b_3 = 0$ con lo que $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$. Esto nos demuestra que la expresión es única.
Esta unicidad me permite asociar de forma unívoca el vector **OA** con la terna (a_1, a_2, a_3) que serán las coordenadas del punto A en el sistema de referencia ortonormal.

Componentes de un vector libre **v** *en un sistema de referencia ortonormal.*

Sea el vector libre *v* de representante AB, siendo A un punto de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y B el punto extremo de coordenadas (b_1, b_2, b_3). Según las leyes de la suma de vectores, **OA + AB = OB**; de donde
AB = OB – OA = $(b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$[2] que son las componentes del vector **v**.



Podemos definir la suma de vectores y el producto por escalares en función de sus componentes, esto es:

Suma:
$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **que para abreviar identificamos con** (u_1, u_2, u_3)
$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ **que para abreviar identificamos con** (v_1, v_2, v_3)

u+v = $(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j} + (u_3 - v_3)\mathbf{k}$ **que identificamos con** $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

Producto por escalares: Análogamente se demuestra que :

$\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{u} = (\boldsymbol{\lambda}\, u_1, \boldsymbol{\lambda}\, u_2, \boldsymbol{\lambda}\, u_3)$

[2] Definir (b1, b2, b3) - (a1, a2, a3) = (b1- a1, b2- a2, b3- a3), procede de que **OB**=$b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $\mathbf{OA} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, por tanto **OB-OA** = (b1- a1)**i** +(b2- a2)**j** +(b3- a3)**k**

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dados **u, v** ∈ V3. Se llama producto escalar de los vectores dados al siguiente valor:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Obsérvese que el producto escalar no obtiene un vector sino un escalar, de ahí su nombre.

Propiedades del producto escalar:

1) Commutativa $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$
2) Distributiva respecto a la suma $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$
3) Asociativa respecto al producto por escalares: $k.(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (k.\mathbf{u}).\mathbf{v}$
4) Si **u** y **v** son perpendiculares, entonces $\mathbf{u}.\mathbf{v}=0$ (La demostración es trivial aplicando la definición)
5) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}}$

Expresión del producto escalar en un sistema de referencia ortonormal:

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}).(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) =$

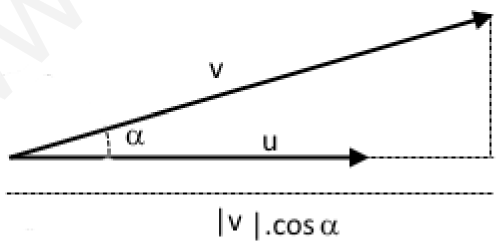
$(u_1.v_1)\mathbf{i.i} + (u_1.v_2)\mathbf{i.j} + (u_1.v_3)\mathbf{i.k} + (u_2.v_1)\mathbf{j.i} + (u_2.v_2)\mathbf{j.j} + (u_2.v_3)\mathbf{j.k} + (u_3.v_1)\mathbf{k.i} + (u_3.v_2)\mathbf{k.j} + (u_3.v_3)\mathbf{k.k},$

Ahora bien $\mathbf{i.j} = \mathbf{i.k} = \mathbf{j.k} = 0$, mientras que $\mathbf{i.i} = \mathbf{j.j} = \mathbf{k.k} = 1$

Con lo que $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (u_1.v_1)\mathbf{i.i} + (u_2.v_2)\mathbf{j.j} + (u_3.v_3)\mathbf{k.k} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$

Interpretación geométrica del producto escalar:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \cos \alpha$$



Obsérvese que el producto escalar es el producto del módulo de un vector por la proyección del otro vector sobre el primero.

Módulo de un vector en función de sus componentes en un sistema ortonormal.
Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, es decir de componentes $(u_1,\ u_2,\ u_3)$
$\mathbf{u.u} = |\mathbf{u}|.|\mathbf{u}| \cos 0^o = |\mathbf{u}|^2$; de donde $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u.u}}$.
Por otra parte $\mathbf{u.u} = u_1.u_1 + u_2.u_2 + u_3u_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

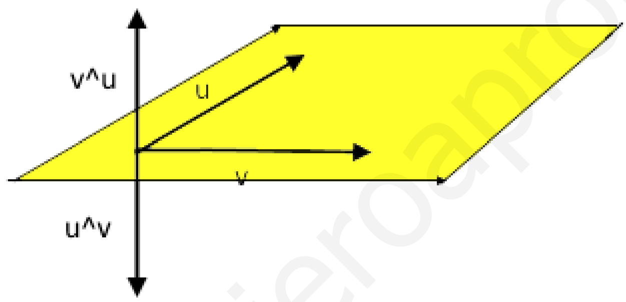
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

PRODUCTO VECTORIAL

Dados **u, v** ∈ V3. Se llama producto vectorial de los vectores dados, al vector que denotaremos por **u^v** de modo que:

$$|\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\ | = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ sen } \angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

La dirección vendrá determinada por la *perpendicular común* a ambos vectores y el sentido vendrá determinado por *la regla del sacacorchos.*



Propiedades del producto vectorial:

1) Anticommutativa **u^v= -v^u**
2) Distributiva respecto a la suma **u^(v+w) = u^v + u^w**
3) Asociativa respecto al producto por escalares: k.(**u^v**) = (k.**u**)^**v**
4) Si **u** y **v** tienen la misma dirección, entonces **u^v**=0 (La demostración es trivial aplicando la definición)

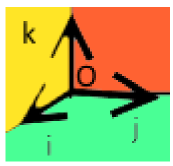
Expresión del producto vectorial en un sistema de referencia ortonormal:

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ **y** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k})\wedge(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) =$

$(u_1.v_1)\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} + (u_1.v_2)\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} + (u_1.v_3)\mathbf{i}\wedge\mathbf{k} + (u_2.v_1)\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} + (u_2.v_2)\mathbf{j}\wedge\mathbf{j} + (u_2.v_3)\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} + (u_3.v_1)\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} + (u_3.v_2)\mathbf{k}\wedge\mathbf{j} + (u_3.v_3)\mathbf{k}\wedge\mathbf{k}$,

Ahora bien $\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{i}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{j}$; $\mathbf{j}\wedge\mathbf{k}=\mathbf{i}$ mientras que $\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = 0$



$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = (u_1.v_2)\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} + (u_1.v_3)\mathbf{i}\wedge\mathbf{k} + (u_2.v_1)\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} + (u_2.v_3)\mathbf{j}\wedge\mathbf{k} + (u_3.v_1)\mathbf{k}\wedge\mathbf{i} + (u_3.v_2)\mathbf{k}\wedge\mathbf{j} = (u_1.v_2)\mathbf{k} + (u_1.v_3)\mathbf{j} - (u_2.v_1)\mathbf{k} + (u_2.v_3)\mathbf{i} - (u_3.v_1)\mathbf{j} - (u_3.v_2)\mathbf{i} =$

$(u_2.v_3 - u_3.v_2)\mathbf{i} - (u_3.v_1 - u_1.v_3)\mathbf{j} + (u_1.v_2 - u_2.v_1)\mathbf{k}$

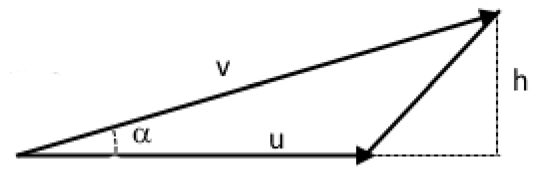
Esta expresión es el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica del producto escalar:

Puesto que

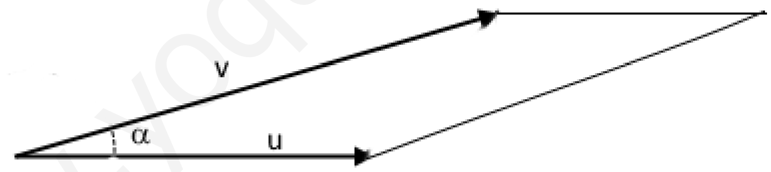
$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|.|\mathbf{v}| \text{ sen } \alpha$$



El área del triángulo formado por **u** y **v** es $\frac{|\mathbf{u}|.h}{2}$ **.** Ahora bien, h = |**v**|.senα

Por tanto Área = $\frac{|\mathbf{u}|.|v|.\text{sen}\alpha}{2}$, $|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|.\text{sen}\alpha = 2.\text{Área}$

Por lo tanto, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **v**.



PRODUCTO MIXTO

Sean **u, v, w** tres vectores libres de V3. Se define el producto mixto, que representaremos por [**u, v, w**] al producto escalar de **u**. por el vector **v^w**

[**u, v, w**] = **u.**(**v^w**). Obviamente el resultado es un escalar.

Si **u, v** y **w** están referidos a un sistema de referencia ortonormal, el producto mixto viene dado por el determinante de la matriz configurada con **u**, **v** y **w**.

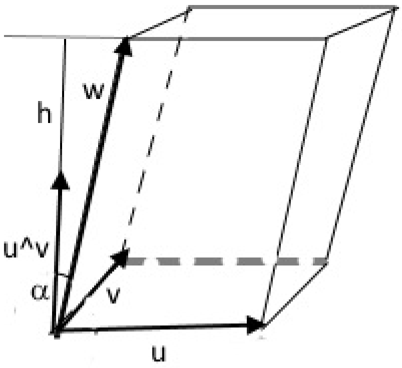
Propiedades del producto mixto:

1) [**u, v, w**] = -[**v, u, w**] = [**v, w, u**] = -[**w, v, u**]=…
2) [**u, u, w**] = 0

3) Si **u** y **v** son linealmente dependientes [**u, v, w**] = 0

Interpretación geométrica del producto mixto

|**u** ^**v**| area del paralelogramo. Entonces |**u**^**v**|.h es el volumen del paralepipedo. Pero h es |**w**|.cos α.



El volumen del paralepipedo es

|**w**|.|**u**^**v**| cos $\angle(\mathbf{w}, \mathbf{u}\text{^}\mathbf{v})$ Esta es la definición del productor escalar. de **w.(u^v)**

En consecuencia, el valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralepípedo determinado por los tres vectores **u, v, w**.

El volumen del tetraedro (prisma triangular) formado por los tres vectores es 1/3 del producto mixto.

Cálculo del punto medio entre dos dados:

Dados A(a_1, a_2, a_3) B (b_1, b_2, b_3). El punto medio $M = \frac{\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}}{2} = \frac{(a1+b1,a2+b2,a3+b3)}{2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentra un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas (1,0,1) y (1,2,0)

SOLUCIÓN:

Primero hallaremos el vector ortogonal a los dos vectores. Esto se obtiene calculando el producto vectorial de ambos, es decir:

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + j + 2k$, es decir el vector (-2,1,2).

Un vector se reduce a módulo 1, dividiendo sus componentes por su módulo.

$|(-2,1,2)| = \sqrt{9} = 3$. El vector pedido es $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2. Determina el valor de a para que los puntos A = (1,0,1), B =(1,1,1) y C = (1,6,a) sean los tres vértices de un triángulo de área 3/2.

SOLUCIÓN:

Por la interpretación geométrica del producto vectorial, sabemos que su módulo es el área del paralelogramo que forman los vectores **AB** y **AC**. Por tanto el área del triángulo es la mitad del módulo.

AB = (0, 1, 0) **AC** = (0, 6, a-1)

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)i$ esto es, **AB^AC** = (a-1, 0, 0)

$\frac{3}{2} = \frac{|\mathbf{AB}\wedge\mathbf{AC}|}{2}$; $3 = \sqrt{(a-1)^2}$; $a - 1 = 3$; $a = 4$

3. Dados los vectores u = (1, 2, 0) y v = (0,1,2), calcula

a) El producto vectorial de u y v.

b) Un vector unitario ortogonal a u y a v

c) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores u y v.

SOLUCIÓN:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 2j + k \qquad (4, -2, 1)$$

b) $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = \sqrt{21}$ $\left(\frac{4}{\sqrt{21}} \quad \frac{-2}{\sqrt{21}} \quad \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$

c) Área del paralelogramo = $\sqrt{21}$

4. Calcula los valores de x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2. 0 , -1)

SOLUCIÓN:

Hacemos el producto vectorial: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j - 4k$ (-2, 3, -4)

(x, y, 1) y (-2, 3, -4) son linealmente dependientes entonces x/-2 = y/3 = 1 /-4; de donde x = ½ y = -3/4

5. Dados los puntos A = (1,0,1), B = (1,1,1) y C = (1,6, p). Determinar los valores de p para que los tres puntos anteriores estén alineados. ¿Existe algún p para el cual los puntos A, B y C sean los tres vértices consecutivos de un paralelogramo de área 3.

SOLUCIÓN:

Para que A, B y C estén alineados, los vectores AB y BC tienen que tener la misma dirección, es decir ser dependientes **AB**=(0, 1, 0) **BC** = (0, 5, p-1)

Rango $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & p-1 \end{pmatrix}$=1 ,entonces p-1 = 0. p = 1.

Para que A, B y C sean los tres vértices consecutivos de un paralelogramo de area 3

BA = (0 , -1, 0) y **BC** = (0 ,5, p-1) **BA**^**BC** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & p-1 \end{vmatrix} = (1-p)i$

Cuyo módulo es 1- p = 3, p = -2.

6. Sean u y v dos vectores. Comprobar que si (u + v) (u – v) = 0, entonces |u| = |v|

Calcular los vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores u (-3, 4, 1) y v = (-2,1,0). (Santiago, Septiembre 2001)

SOLUCIÓN

(u + v) (u – v) = u.u – vv = $|\mathbf{u}|^2$ - $|\mathbf{v}|^2$ = 0; $|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}|^2$ entonces |u| = |v|

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j + 5k$$ (-1, -2, 5). Su módulo es $\sqrt{30}$

Los vectores unitarios pedidos son: $\left(\frac{-2}{\sqrt{30}} \quad \frac{1}{\sqrt{30}} \quad \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$ y $\left(\frac{2}{\sqrt{30}} \quad \frac{-1}{\sqrt{30}} \quad \frac{-2}{\sqrt{30}}\right)$

7. Determinar los vectores unitarios v (a, b, c) (con a>0, b>0, c>0), que forman un ángulo de π/6 radianes con el vector u (1, 1, 1) y un ángulo de π/4 radianes con w: (2,0,2) (Santiago junio 2002)

SOLUCIÓN

Haciendo los productos escalares, tenemos:

$a + b + c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{3}\cos 30º = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2} = 1/2$

$2a + 2c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{8}\cos 45º = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{8}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Es un sistema de múltiples soluciones y resuelvo c = t, a = $\frac{\sqrt{2}-2t}{2}$, b = $\frac{1-\sqrt{2}-3t}{2}$,

$$0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Dados los vectores u (-2, 0, 4) y v (-1, 0, a). ¿Para qué valores de a el módulo del vector (u + v)^(u-v) vale 4? (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:

u + v = (-3, 0, 4+a) u – v = (-1, 0, 4-a) (u + v)^(u-v)= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 4+a \\ -1 & 0 & 4-a \end{vmatrix}$ =
$(3(4-a) - (4+a), 0, 0)$ = (8-4a, 0, 0)
|(u + v)^(u-v)| = 8 – 4a = 4. De ahí se desprende que a = 1.

9. Determinar los valores de a y b, a>0, para que los vectores u (a, b, b), v (b, a, b) y w (b, b, a) sean unitarios y ortogonales dos a dos. (Santiago, junio 2003)

Si son unitarios los módulos valen 1, es decir $\sqrt{a^2 + 2b^2} = 1$ en los tres casos, entonces

$$a^2 + 2b^2 = 1$$

Si u $\perp v$ u.v = 0 : 2ab+b^2 = 0 Si u $\perp w$ u.w = 0 : 2ab+b^2 = 0 Si v$\perp w$ v.w = 0 : 2ab+b^2=0, de aquí $a = \frac{-b^2}{2b} = \frac{-b}{2}$; sustituyendo en $a^2 + 2b^2 = 1$ tenemos que $\frac{b^2}{4} + 2b^2$=1 ; 9b^2 = 4. b = $\frac{-2}{3}$. a = $\frac{1}{3}$

Los vectores son u $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ v $(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3})$ w $(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$

10. Dados los vectores $u_1(1, 2, 1)$, $u_2(1, 3, 2)$, $v_1(1, 1, 0)$, $v_2(3, 8, 5)$. Demostrar que u_1 y u_2 dependen linealmente de v_1 y v_2. (Santiago, septiembre 2003)

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2.$ Esto quiere decir que u_1 y u_2 son linealmente independientes.

Rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} = 2$ Tomemos los menores $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$

Esto quiere decir que u_1 y u_2 dependen linealmente de v_1 y v_2

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1. Sean **u**, **v** dos vectores tales que |**u**| = 3, |**v**|=4. |**u-v**| = 5. Calcula el ángulo que forman los vectores **u** y **v**. Calcula el producto mixto [**u, v, u**x**v**], siendo **u**x**v** el producto vectorial de **u** y **v**. (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 2. Sean **v,w** dos vectores tales que |**v**| = 6, |**w**|=10. |**w+v**| = 14. Calcula el ángulo que forman los vectores **w** y **v**. (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores **u** (3, 7, -6) y **v** (4, 1, -2)

Ejercicio 4. Comprueba que cualquiera de los vectores **a** (1, 2, 3), **b** (2, 1, 3) y **c** (1, 0, 1) puede expresarse como combinación lineal de los otros dos.

Ejercicio 5. Determina m y n para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes. (2, 3, 4), (-1, 2, 6), (m, n, 0)

Ejercicio 6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?
A = {(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)}; B = {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)}

Ejercicio 7. En una base ortonormal tenemos **a** (1, 2, 2) y **b** (-4, 5, -3). Calcula a) **a.b**; b) |**a**| y |**b**| c) el ángulo que forman **a** y **b** d) el vector proyección de **b** sobre **a**.

Ejercicio 8. Dados los vectores **a** = **i**+m**j**+**k** y **b** = -2**i**+4**j**+m**k**, halla m para que los vectores **a** y **b** sean a) paralelos, b) perpendiculares

Ejercicio 9. Halla el vector proyección del vector **u**(3, 1,2) sobre el vector **v**(1, -1, 2)

Ejercicio 10. Halla el área del paralelogramo que forman los vectores **a**(7, -1, 2) y **b**(1, 4, -2)

Ejercicio 11. Halla un vector ortogonal a **u**(1, -1,0) y **v**(2, 0, 1) cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

Ejercicio 12. Calcula el volumen del paralepípedo determinado por los tres vectores **u** (1, -3, 2) **v** (1, 0, -1) **w** (2, 3, 0)

Ejercicio 13. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores **a** (3, -1, 1), **b** (1, 7, 2) y **c** (2, 1, -4)

Ejercicio 14. Comprueba que el paralelogramos determinado por los vectores **u** (3, -2,1) y **v** (4, 3, -6) es un rectángulo.

TEMA IV

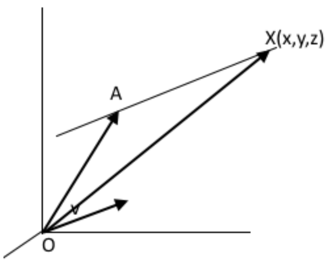
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

Ecuaciones de la recta en el espacio.

En todo momento trabajaremos sobre un sistema de referencia ortonormal $\mathfrak{R}\ (0, B\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}. \boldsymbol{k}\}$.

Para determinar una recta en el espacio, de forma única, necesitamos un punto por el que pasa y una dirección (que nos la dará un vector libre).

Estos dos elementos serán el punto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y un vector **v** de componentes (v_1, v_2, v_3).



Sea X(x,y,z) un punto genérico de la recta que pasa por A y tiene por dirección v.

Se observa que **OA+AX**=**OX**, **AX** está en la dirección de **v**, por tanto **AX**=λ.**v**

OX = **OA** + λ.**v.** Escribiendo las componentes

$(x,y,z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda.(v_1, v_2, v_3)$ que es la ecuación vectorial de la recta.

Desarrollando por componentes individuales tenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$$

llamadas ecuaciones paramétricas, siendo λ el parámetro que al variar va obteniendo los distintos puntos de la recta.

Como el valor del parámetro λ ha de ser el mismo para cada punto, al ser despejado en las paramétricas e igualando, obtenemos:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

que son las ecuaciones continuas.

Desarrollando las dos igualdades, obtenemos dos ecuaciones que conforman las ecuaciones implícitas o cartesianas.

Ejemplo: Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y tiene como vector dirección **v** (-1, 4, 3).

Vectorial.- (x, y, z) = (1, 2, 3) + λ.(-1, 4, 3)

Paramétricas.- $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ Continuas.- $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$

Implícitas o generales: $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 3x + z = 6 \end{cases}$ Se trata de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado para poder generar infinitas soluciones (puntos de la recta).

Para pasar de implícitas a paramétricas, basta resolver el sistema, dando el valor del parámetro a la incógnita adecuada.

Otra forma de determinar de forma única una recta en el espacio es la presencia de dos puntos P y Q, la cuestión se reduce a la anterior, tomando como punto cualquiera de ellos y como vector dirección **PQ** o **QP.**

En el espacio no existe la ecuación punto-pendiente, al no caracterizar la pendiente una recta de forma unívoca.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio:

Sean r y s, dos rectas en el espacio, determinadas respectivamente por los puntos P, Q y los vectores directores **u** y **v**.

Consideremos la matriz por filas o columnas de los vectores **PQ, u** y **v**, y estudiemos el rango.

a) Si rango (**PQ,u,v**) = 1, las rectas son coincidentes.
b) Si rango (**PQ,u,v**) = 2 $\begin{cases} \text{paralelas si rango}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 1 \\ \text{se cortan en un punto si rango}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 2 \end{cases}$.
c) Si rango (**PQ, u, v**) = 3, las rectas se cruzan sin cortarse.

También puede hacerse estudiando el sistema de ecuaciones que se determinan al igualar sus ecuaciones paramétricas.

Veamos un ejemplo y utilicemos los dos sistemas:

Sea r: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$ $y \quad s \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 10 + \alpha \\ z = 9 - \alpha \end{cases}$

Siempre que estemos estudiando dos o más rectas en el mismo ejercicio, deben denominarse los parámetros con una expresión distinta para evitar confusiones.

Los elementos de r son P(1,2,3) y u(-1,4,3); los de s son Q(-1,10,9) y v (-2,1,-1)

Establecemos el vector **PQ** (-2,8,6).

Lo primero que debemos establecer es si existen dependencia lineal entre **u** y **v**. Para ello estudiamos el rango de $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ que es 2. Por tanto descartamos el paralelismo y la igualdad.

Estamos en el caso de que se cortan o se cruzan. Eso lo determinará el rango de

$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Su determinante es 0. Por tanto el rango es 2. Las rectas se cortan en un punto.

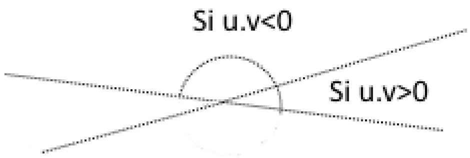
¿Cómo hallamos el punto de corte?. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 1-\lambda = -1-2\alpha \\ 2+4\lambda = 10+\alpha \\ 3+3\lambda = 9-\alpha \end{array} \quad \text{con incógnitas } \alpha \text{ y } \lambda \text{, es decir: } \quad \begin{array}{l} 2\alpha-\lambda=-2 \\ -\alpha+4\lambda=8 \\ \alpha+3\lambda=6 \end{array}$$

Ya sabemos por el estudio previo anterior que ese sistema ha de ser compatible determinado. Así que el sistema de Cramer equivalente será

$$\begin{array}{l} 2\alpha-\lambda=-2 \\ -\alpha+4\lambda=8 \end{array}$$ que al resolverlo se obtiene $\alpha = 0$; $\lambda=2$. El punto de corte es (-1, 10, 9)

Ángulo que forman dos rectas.



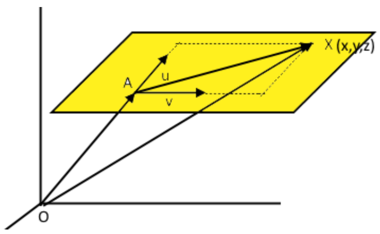
Para averiguar el ángulo que forman dos rectas, solamente tenemos que averiguar el ángulo que forman los vectores directores. Si **u** y **v** son los vectores directores de las rectas.

Cos (**u**, **v**) $=\dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$, el ángulo buscado será arccos $\dfrac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ **.** Si el valor del cociente es positivo, el ángulo es el agudo. Si el valor del cociente es negativo, el ángulo es el suplementario del agudo.

En caso de que se crucen, el ángulo es el que determina la recta r con la proyección de la recta s, sobre r.

Ecuaciones del plano en el espacio

Para determinar un plano en el espacio, de forma única, necesitamos un punto por el que pasa y dos vectores linealmente independientes.
Estos dos elementos serán el punto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y los vectores **u**(u_1, u_2, u_3) y **v** (v_1, v_2, v_3). De forma que rango (**u,v**) = 2



Sea X(x,y,z) un punto genérico del plano que pasa por A.

Se observa que **OA+AX=OX**, **AX**=α.**u**+β**v**

OX = **OA** + α.**u**+β**v.** Escribiendo las componentes

$$(x,y,z) = (a_1, a_2, a_3) + \alpha.(u_1, u_2, u_3) + \beta.(v_1, v_2, v_3)$$

que es la ecuación vectorial del plano.

Desarrollando por componentes individuales tenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = a_2 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = a_3 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$$

llamadas ecuaciones paramétricas, siendo α y β los parámetro que al variar van generando los distintos puntos del plano.

Si consideramos las ecuaciones paramétricas como un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $\alpha\, y\, \beta$, el sistema ha de ser compatible indeterminado (tiene que tener infinitas soluciones, tantas como puntos tiene el plano). Entonces los rangos de la matriz principal y ampliada tendrían que coincidir, es decir:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2 = \text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de vectores es 2 por elección de dichos vectores en la definición del plano.

Esto obliga a que $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{vmatrix} = 0$ o indistintamente $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando este determinante, obtenemos la ecuación

Ax + By + Cz + D = 0 que es la llamada ecuación implícita o cartesiana del plano.

Es importante observar que el vector formado por los coeficientes (A, B, C) es un vector normal (perpendicular) al plano, que representaremos por **n**

En efecto, desarrollando $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$, se obtiene:

$(x-a_1)\,(u_2v_3-u_3v_2) - (y-a_2)(u_1v_3-u_3v_1) + (z-a_3)(u_1v_2-u_2v_1)$

$\mathbf{n} = (A, B, C) = (u_2v_3-u_3v_2, -u_1v_3+u_3v_1, u_1v_2-u_2v_1) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$

Recordemos que **u^v** es un vector perpendicular a **u** y **v**, por tanto es perpendicular al plano que determinan.

Este resultado nos permite definir un plano de forma única, dando un punto y el vector normal.

Otra forma de determinar un plano de forma única, es dando tres puntos no alineados P, Q, R. El problema se reduce a un punto (cualquiera de ellos) y dos vectores (**PQ** y **PR** por ejemplo que al no estar P, Q y R alienados, son linealmente independientes.)

Ejemplo 1: Escribir las ecuaciones del plano que pasa por P(1,1,3) y tiene como dirección, los vectores **u** (2.-1,2) y **v**(3,1,1)

Vectorial (x,y,z) = (1,1,3)+α(2.-1,2)+β(3,1,1)

$$\text{Paramétricas} \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

Implícita: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, (x-1).(-3) – (y-1)(-4) + (z-3)5 = 0

$$-3x+4y+5z-16 = 0$$

El vector normal es (-3,4,5)

Ejemplo 2: Escribe las ecuaciones del plano que pasa por P(1,0,2) y su vector normal es **n**(2,5,7)

La implícita es 2x + 5y + 7z + D = 0. Para hallar D, sustituimos P en x, y,z. resultando:

2+14+D = 0; D = -16. La ecuación implícita es: 2x + 5y + 7z -16 = 0

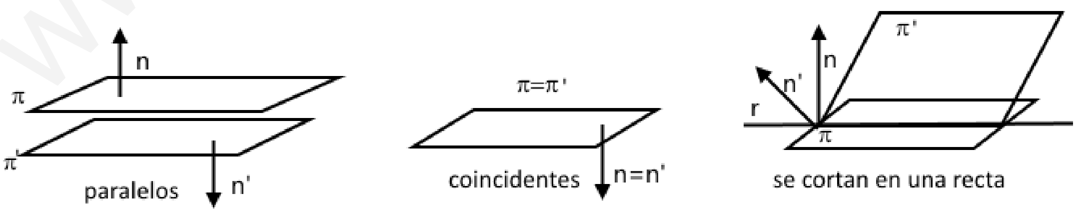
Las paramétricas: Hacemos y = α ; z = β ; y despejamos x

$$x = \frac{16-5\alpha-7\beta}{2} = 8 - \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta \qquad \text{Paramétricas} \begin{cases} x = 8 - \frac{5}{2}\alpha - \frac{7}{2}\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Los vectores que dirigen el plano son (-5/2, 1, 0) y (-7/2, 0,1) Como nos importan por la dirección, podemos simplificarlos[3] de forma que sus componentes sean enteras. Multiplicamos por 2 y obtenemos los vectores (-5, 2,0) y (-7,0,2)

Ecuación vectorial: (x,y,z) = (1,0,2) + α(-5, 2,0) + β(-7,0,2)

Posición relativa de dos planos en el espacio.



$$Sean\ \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \ \ y \ \ \pi': A'x + B'y + C'z + D` = 0$$

[3] Este proceso de simplificación de vectores dirección también es válido en el caso del vector director de la recta. Nunca puede hacerse esta simplificación cuando se trata de puntos.

a) si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ son coincidentes. Rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 1$

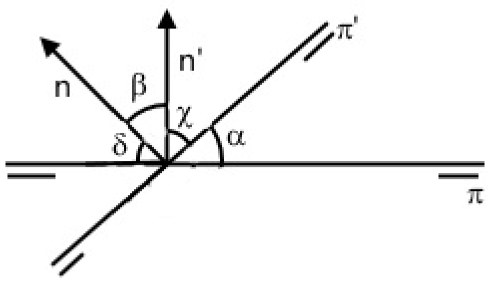
b) si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ son paralelos.

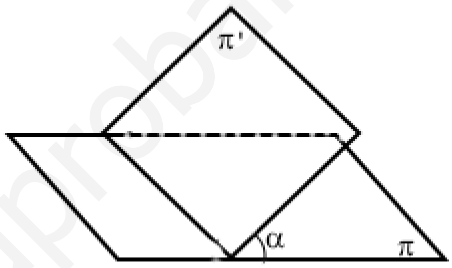
Rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} = 2$ y rango $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1$

c) si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ se cortan en una recta

rango $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$

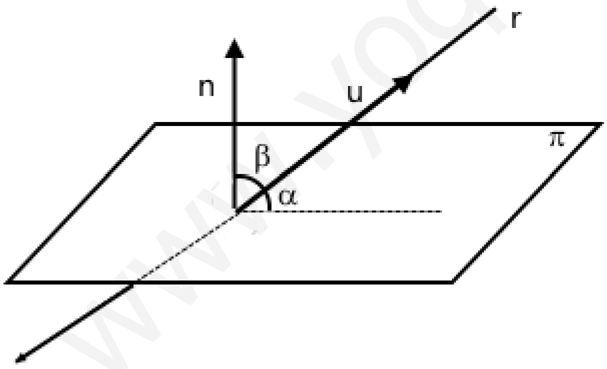
Ángulo formado por dos planos. Si β es el ángulo formado por los vectores normales, tenemos:





$\alpha+\chi=90$; $\beta+\chi=90$ $\alpha-\beta=0$ $\alpha = \beta$

El ángulo formado por dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales.



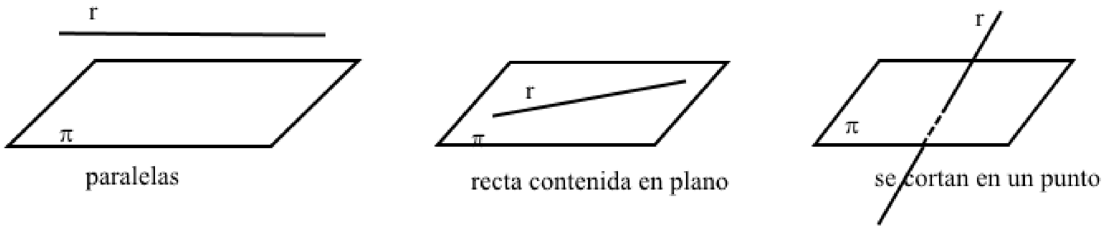
Ángulo formado por recta y plano

El ángulo formado por la recta y el plano es α, pero podemos comprobar que es el complementario de β, cuyo coseno puede ser calculado por el producto escalar de n por u.

Por complementariedad sen α = cos β

sen $\alpha = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$; $\alpha = \arcsen \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}$

Posición relativa entre recta y plano:



Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones implíticas de la recta con la ecuación implícita del plano. Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Puede producirse: a) Sea incompatible (la recta y el plano son paralelos) b) Compatible determinado (la recta y el plano se cortan en un punto que es la solución única del sistema. C) Es compatible indeterminado (la recta está contenida en el plano).

Otro método de resolución es sustituir en la ecuación implíticita del plano, las ecuaciones parámetricas de la recta y despejar el parámetro.

Veamos un ejemplo por los dos métodos:

Dada la r: $\begin{cases} 4x+y=6 \\ 3x+z=6 \end{cases}$ y el plano π: 2x+3y-4z-1=0

Estudiar su posición relativa:

Método 1: Mediante el estudio y resolución si ha lugar, del sistema:

$\begin{cases} 4x+y=6 \\ 3x+z=6 \\ 2\mathrm{x}+3\mathrm{y}-4\mathrm{z}-1=0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$ rango (A) = 3, pues |A|=2; ran(A|B)=3

sistema compatible determinado (solucion única). La recta y el plano se cortan en un punto. Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{matrix}}=\frac{7}{2} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-16}{2} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-9}{2}$$

El punto de corte es (7/2, -16/2, -9/2)

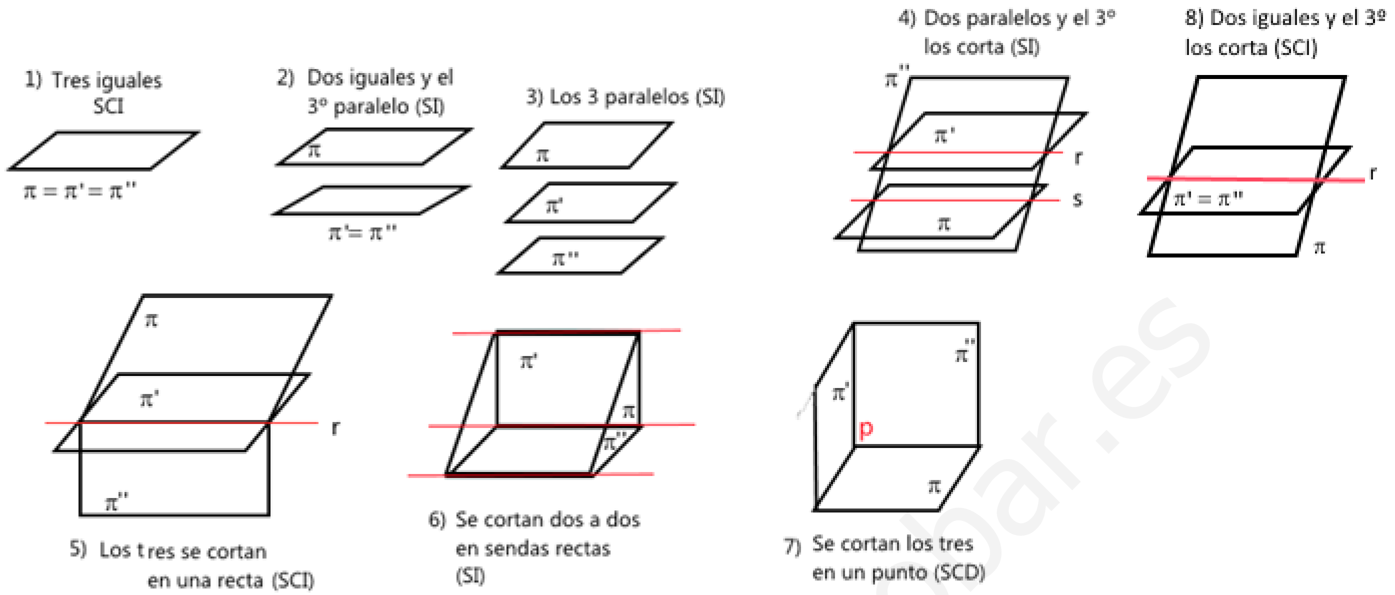
Método 2:

Paramétricas de la recta: .- $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+4\lambda \\ z=3+3\lambda \end{cases}$ Sustituimos en la ecuación implícita del plano:

$2(1-\lambda)+3(2+4\lambda)-4(3+3\lambda)-1=0$ -2λ = 5 ; λ=-5/2

Sustituyendo λ en las paramétricas de la recta obtenemos: x=7/2, y=-8, z=-9/2

Posición relativa entre tres planos:



Sean π: Ax+By+Cz+D = 0 ; π': A'x+ B'y+ C'z+D`=0; π'': A''x+ B''y+ C''z+D``=0 ;

Caso 1) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 1$. Los tres planos son coincidentes

Caso 2) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Dos iguales y el 3º paralelo.

Caso 3) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 1$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Los 3 paralelos y distintos.

Caso 4) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Dos paralelos y el 3º corta a los otros dos en sendas rectas.

Caso 8) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Dos iguales y el tercero cortándolos en una recta.

Caso 5) $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; $\text{rango}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 2$ Los tres se cortan en una recta

Caso 6) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 2$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Se cortan dos a dos en una recta

Caso 7) rango$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} = 3$; rango $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} = 3$ Tienen un punto común.

Siempre conviene primero estudiar si hay paralelismo (proporcionalidad entre los vectores normales). Si no es así, es uno de los casos 5 (S.C.I), 6 (S. I) o 7 (S.C.D.)

Distancias:

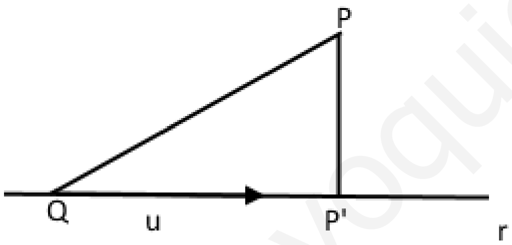
Distancia entre dos puntos

A(a_1, a_2, a_3) B (b_1, b_2, b_3)

La distancia entre A y B es el módulo del vector **AB** (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)

$$d\,(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_2 - a_3)^2}$$

Distancia de un punto a una recta:

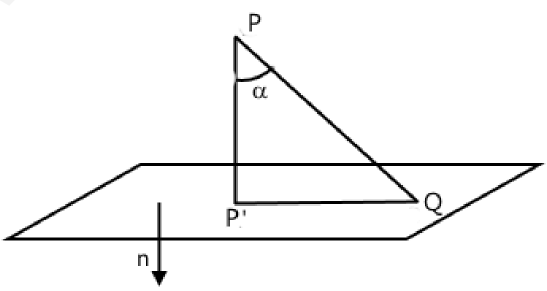


Sea P un punto y r una recta de dirección **u** y que pasa por un punto Q.

$d(P,r) = |\mathbf{PP'}| = |\mathbf{PQ}|.\text{sen}\,(\mathbf{PQ},\mathbf{u}) = \frac{|u|}{|u|}|\mathbf{PQ}|.\,\text{sen}\,(\mathbf{PQ},\mathbf{u}) = \frac{|\mathbf{PQ}\wedge\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$

Distancia de un punto a un plano

Sea el plano π: Ax+By+Cz+D = 0 y el punto P (a_1, a_2, a_3) . Sea Q un punto conocido



del plano Q (b_1, b_2, b_3) $d(P,\pi) = |PP'| = |PQ||\cos\alpha| = \frac{|n|}{|n|}|PQ||cos\alpha| = \frac{|n.PQ|}{|n|}$

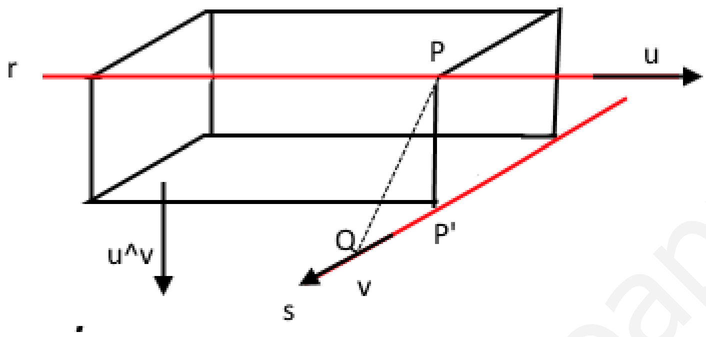
Como **n** (A,B,C) **PQ** (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)

$$\frac{|n.PQ|}{|n|}=\frac{|A(b_1-a_1)+B(b_2-a_2)+C(b_3-a_3)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ab_1+Bb_2+Cb_3-Aa_1-Bb_2-Cb_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-D-Aa_1-Bb_2-Cb_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$\frac{|Aa_1+Bb_2+Cb_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Distancia entre dos rectas

Si las rectas son paralelas, el problema se reduce al cálculo de la distancia de un punto a una recta. Basta tomar un punto de r cualquiera y calcular la distancia de dicho punto a la otra recta s. Si las rectas se cortan, la distancia es O.



Sean r, s dos rectas que se cruzan sin cortarse de vectores dirección **u** y **v** respectivamente.

Tomamos un punto P de r.

d(r,s) = |PP'|

Ahora bien,

$$|\mathbf{PP'}|=|\mathbf{PQ}|.|\cos(\mathbf{PQ},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})|=\frac{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||\mathbf{PQ}|.|\cos(\mathbf{PQ},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|}=$$

$$\frac{|[\mathbf{PQ},\mathbf{u},\mathbf{v}]|}{|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}|}$$

También se puede realizar hallando la distancia entre los dos planos paralelos determinados por un punto de r y un punto de s respectivamente, teniendo ambos como vector normal **u^v.**

Distancia entre dos planos:

Si los planos se cortan en una recta, la distancia es 0. Si los planos son paralelos, el problema se reduce al cálculo de la distancia de cualquier punto de uno de los planos al otro. (Distancia de un punto a un plano).También, es fácilmente demostrable que si los planos son paralelos, escribiendo ambas ecuaciones con las mismas componentes del vector normal, es decir:π: Ax+By+Cz+D=0 π': Ax+By+Cz+D' = 0 la distancia entre ambos planos se establece según la siguiente expresión:

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿En qué posición relativa pueden estar tres planos en el espacio que no tienen ningún punto en común? Determínese la posición relativa de los planos $\pi: x - 2y + 3z = 4, \sigma: 2x + y + z + 1 = 0, \varphi: -2x + 4y - 6z = 0$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCION:

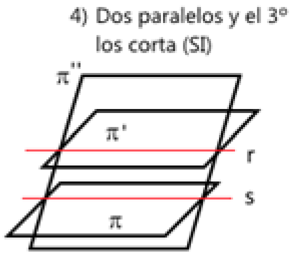
Los tres paralelos, dos coincidentes y el tercero paralelo, dos paralelos y el tercero cortándoles en rectas distintas, se cortan dos a dos en sendas rectas.

Para estudiar la posición relativa de los tres planos, estudiamos primero sus vectores normales para ver si hay paralelismo entre ellos: $n_\pi = (1, -2, 3)$; $n_\sigma = (2, 1, 1)$; $n_\varphi = (-2, 4, -6)$

Se puede apreciar de entrada que $n_\varphi = (-2, 4, -6)$ $y\, n_\pi = (1, -2, 3)$ son claramente dependientes, están en la misma dirección. Veremos si los planos son paralelos o coinciden. Para ello veremos si el término independiente conserva la proporción de las componentes de los vectores que es -2. La proporción entre términos independientes es 0, por lo que los planos son paralelos.

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{0}{-4}$$

El tercer plano no es paralelo a los otros dos. Por lo tanto la posición relativa es: 2 planos paralelos y el tercero cortándolos en sendas rectas.



2. Determinar el ángulo que forman la recta r, que pasa por el punto (1, -1 ,0) y tal que su vector director es v=(-2,0,1) y la recta de ecuación: $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{2}$ (Santiago julio 2001)

SOLUCIÓN:

El ángulo que forman dos rectas es el ángulo formado por sus vectores directores que en este caso son (-2. 0, 1) y (4, 4, 2).

Si hacemos su producto escalar, obtenemos -6 = |(-2,0,1)||(4.4.2)| cos α

-6 = $\sqrt{5.36}.$ cosα de donde cosα = $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ α = 116º o 64º si consideramos el ángulo agudo que forman.

3. Calcular la distancia mínima entre las rectas r y s, donde r tiene por ecuaciones (r: x = 3y = 5z) y la recta s pasa por los puntos A(1,1,1) y B(1,2-3) (Santiago, septiembre 2001)

SOLUCIÓN: Pasamos r a paramétricas: $\begin{cases} x = 5t \\ y = \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$

d (r, s) = $\frac{|[PQ, v_r, v_s]|}{|v_r \Lambda v_s|}$ P tomo un punto de r: (0, 0, 0) Q un punto de

s (1, 1,1); v_r = (5, 5/3, 1) que los podemos pasar a enteros (15, 5, 3)

v_s = AB = (0, 1, -4)

[PQ, vr , VS] = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = -20-60-3+60 = -23

$v_r \Lambda v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -23i + 60j + 15k$ (-23, 60, 15)

d(r,s) = $\frac{23}{\sqrt{4354}}$

4. Hallar la distancia del plano $\pi: 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\sigma: \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Paso a cartesiana el plano σ: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 5y - z = 0$

Multiplico la ecuación por -2 y obtengo 4x – 10y +2z = 0. Ambos planos son paralelos y distintos (difieren en el término independiente).

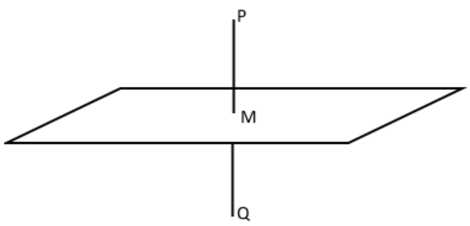
La distancia entre ellos viene determinada por: $\frac{|1|}{\sqrt{120}}$. Utilizo la fórmula que dice que si dos planos son paralelos y sus coeficientes en x y z son iguales (es decir que tienen el mismo vector normal), la distancia viene dada por

$$\frac{|D - D'|}{|\boldsymbol{n}|}$$

Siendo D y D' los términos independientes de ambas ecuaciones.

5. Dados los puntos P=(3, 4, 1) y Q = (7, 2, 7), determinar la ecuación general del plano que es perpendicular al segmento PQ y que pasa por el punto medio de ese segmento. (Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:



Como se aprecia en la figura, el vector normal es el vector **PQ** y el punto por el que pasa es M

M $= \frac{P+Q}{2} = (5, 3, 4)$ y **PQ** (4, -2, 6) que lo podemos simplificar a (2, -1, 3)

La ecuación pedida es 2x – y + 3z + C = 0

Tenemos que pasa por (5, 3,4); 10-3+12 = -C ; C = -19

2x – y + 3z -19 = 0

6. Determinar el ángulo que determinan el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x + 2y - 3z + 4 = 0}$ y la recta $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{2x - y = 0} \\ \boldsymbol{3y + 2z = 12} \end{cases}$ (Santiago, junio 2003)

Necesitamos el vector director de la recta y el normal del plano. Este último es inmediato pues se compone de los coeficientes de x y z en la ecuació n=(1, 2, -3)

Para averiguar el vector director de la recta podemos pasar la ecuación a paraméricas:

x = t y = 2t z = 6-3t El vector director es (1, 2, -3). Si el vector normal del plano coincide con el vector director de la recta, es obvio que el ángulo que forman recta y plano es de 90º. En cualquier caso se obtiene como el arcsen $\frac{|u.v|}{|u||v|} = arcsen\ 0 = 90º$

7. Determinar la ecuación que satisfacen los vectores ortogonales a la recta $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{2x + y - z = 0} \\ \boldsymbol{x - y + 3z = 0} \end{cases}$. Interpretar geométricamente el resultado obtenido. (Santiago, septiembre 2003)

Sean (x, y, z) las componentes de un vector u perpendicular a r. La condición de perpendicular viene dada porque el producto escalar de u con el vector director de r sea cero.

Calculamos el vector director de r, pasando a paramétricas:

z = t; x = -2t/3; y = 7t/3. El vector de r es (-2/3, 7/3, 1) que podemos multiplicar por 3 sin pérdida de dirección: (-2, 7, 3)

(x, y, z)(-2,7,3) = 0; -2x + 7y + 3z = 0 que es la ecuación de un plano

8. Hallar la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones: $\boldsymbol{r\begin{cases} x=\alpha \\ y=-1 \\ z=1-\alpha \end{cases}}$ **s** $\boldsymbol{\begin{cases} x=1+\beta \\ y=2 \\ z=2\beta \end{cases}}$

(Santiago, junio 2004)

d (r, s) = $\frac{|[PQ,u,v]|}{|u\wedge v|}$ siendo P y Q puntos de r y s respectivamente, u y v los vectores directores de r y s respectivamente. P (0, -1, 1) Q (1, 2, 0) u (1, 0, -1) v(1, 0, 2)

PQ = (1, 3, -1) $|[PQ,u,v]| = \left\|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = |-9| = 9$

$u\wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3j$ (0, -3, 0) cuyo módulo es 3.

Entonces d (r, s) = 9/3 = 3

9. Determinar el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, -1) y B = (0, 1, -2) y la recta de ecuación: $\boldsymbol{x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}}$ **(Santiago, junio 2004)**

El ángulo que forman dos rectas es el determinando por el que forman sus vectores directores: AB y (1, 2, -1); AB = (-1, 1, -1)

Cos α = $\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\alpha = 61{,}87º$

10. Comprobar que los puntos A=(1, 0, 3), B = (-2, 5, 4), C = (0, 2, 5) y D= (-1, 4, 7) son coplanarios. De todos los triángulos que se pueden construir teniendo como vértices tres de esos cuatro puntos, ¿cuál es el de mayor área?. Obtener el valor de dicha área. (Santiago, septiembre 2004)

Tomamos los vectores AB (-3, 5, 1); AC (-1, 2, 2) y el punto A (1, 0, 3). Calculamos la ecuación del plano que pasa por A, B y C, esto es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)8+5y-(z-3)=0$$

8x + 5y – z -5 = 0. Comprobamos ahora y D (-1,4,7) está en ese plano.

-8+20-7-5 = 0. En efecto D está en el plano que pasa por A, B y C, por tanto los cuatro puntos son coplanarios.

Con A, B, C, D, podemos formar 4 triángulos ABC ABD BCD y ACD

AD (-2, 4, 4) BC (2, -3, 1) BD (1, -1, 3)

Area (ABD) = $\frac{1}{2}|AB \wedge AD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|16i + 10j - 2k| = \frac{1}{2}\sqrt{300}$

Area (ABC) = $\frac{1}{2}|AB \wedge AC| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|8i + 5j - k| = \frac{1}{2}\sqrt{90}$

Area (BCD) = $\frac{1}{2}|BC \wedge BD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-8i - 5j + k| = \frac{1}{2}\sqrt{90}$

Area (ACD) = $\frac{1}{2}|AC \wedge AD| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|0| = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

El triángulo de mayor área es ABD

11. Hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$ y es paralelo a la recta s que pasa por los puntos P = (2, 0, 1) y Q = (1, 1, 1). Calcular la distancia de s a el plano pedido. (Santiago, septiembre 2004)

Necesito un punto (1, 1, 0) y dos vectores u(2, 4,2) y v= PQ = (-1, 1, 0)

El plano buscado es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-2) - (y-1)2 + z6 = 0$

El plano es -2x – 2y + 6z + 4 = 0. Simplificamos x + y – 3z – 2 = 0

Antes de hallar la distancia de la recta s al plano, vamos a comprobar si no se cortan.

n = (1, 1, -3) y PQ (-1,1,0). El producto escalar es 0. Por tanto son perpendiculares y además ni P ni Q están en el plano por tanto recta y plano son paralelos. La distancia es la distancia de un punto de la recta (1, 1, 1) al plano:

$$\frac{|1+1-3-2|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

12. Calcule la distancia entre las rectas de ecuación r: $x = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{7}$ y

s: $x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (Santiago, junio 2005)

d (r, s) = $\frac{|[PQ,u,v]|}{|u \wedge v|}$ siendo P y Q puntos de r y s respectivamente, u y v los vectores directores de r y s respectivamente. P (0, 1, 4) Q (2, 2, 3) u (1, 3, 7) v(1, 3, 4)

PQ (2, 1, -1) $[PQ, u, v] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -15$ $|u \wedge v| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix} \right\| =$

$$|-9i + 3j| = \sqrt{90}$$

$$d(r,s) = \frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

13. Demostrar que los puntos P(0,0,4), Q(3,3,3), R(2,3,4), S(3,0,1) son coplanarios y determinar el plano que los contiene. (Santiago, junio 2005)

PQ (3,3,-1) PR(2,3,0) PS(3,0,-3) Son coplanarios si el rango es 2

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ En efecto, el rango es 2, por tanto son coplanarios.

El plano que los contiene: P(0,0,4) y los vectores (3,3,-1) y (2,3,0)

$\begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ -3x +2y +(z-4) (-3) =0 ; -3x + 2y -3z +12 = 0

14. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por el punto (1,1,1) y los vectores u(1, -2,2) y v(1,0,1)

La ecuación general del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=0 ; (x-1)(-2)-(y-1)(-1)+(z-1)2

-2x + y + 2z -1 = 0; d (0,0,0), plano) = $\frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

14. Dado el plano π: 2x + my + 3 = 0; y la recta r: $\begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$

Calcula el valor de m para que la recta esté contenida en el plano. Justifica la respuesta.

¿Para algún valor de m, la recta y el plano son perpendiculares?. Justifica la respuesta. (Santiago, junio 2006)

Para que la recta esté contenida en el plano, el sistema formado por las tres ecuaciones tiene que ser compatible indeterminado, pues la solución es la recta (infinitas soluciones).

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 2z + 6 = 0} \\ \boldsymbol{7x - y - 2z = 0} \\ \mathbf{2x + my = -3} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \\ 2 & \text{m} & 0 \end{vmatrix}$ no puede tener rango 3, tiene que tener rango 2, para lo que

Su determinante -12m – 12 = 0, por tanto m = -1. En esas condiciones el rango (A) = 2.

Para comprobar el rango de la ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$= 45, rango (A|B) = 3.

Conclusión: no existe valor de m para el cual, la recta esté contenida en el plano.

Otra forma de hacerlo es pasando la recta a paramétricas y sustituyendo en el plano:

r: $\begin{cases} x + 2y - 2z + 6 = 0 \\ 7x - y - 2z = 0 \end{cases}$ z = t ; x = $\frac{2t}{5} - \frac{2}{5}$; y = $\frac{4t}{5} - \frac{14}{5}$

2($\frac{2t}{5} - \frac{2}{5}$) $+ m\left(\frac{4t}{5} - \frac{14}{5}\right) + 3 = 0$; t = $\frac{-11+14m}{4+4m}$. Para cualquier valor distinto de

m ≠ -1, t tiene una solución que genera un punto de corte de la recta con el plano, por lo que no hay infinitas soluciones

La recta y el plano son perpendiculares cuando el vector normal del plano n (2, m, 0) está en la dirección del vector director de la recta, v(2, 4,5)

Rango $\begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1$; Esto es falso siempre puesto que el rango de esa matriz es 2, basta tomar el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

15. a) Dados los vectores u = (1, 0, -1), v = (1, 1, 0), calcula los vectores unitarios que son ortogonales a los dos vectores dados.
b) Sea π el plano determinado por el punto P (2, 2, 2) y los vectores del apartado anterior. Calcula el ángulo que forma el plano con la recta que pasa por los puntos O (0,0,0) y Q (2, -2, 2).
c) Calcula el punto simétrico de O (0,0,0) respecto del plano x – y + z – 2 = 0
(Santiago, septiembre 2006)

a) Los vectores ortogonales son u^v y v^u, que solamente se diferencian en el signo, por lo que basta realizar uno solo de ellos.

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i - j + k$$

Los vectores ortogonales son (1, -1, 1) y (-1,1,-1) ambos tienen módulo $\sqrt{3}$

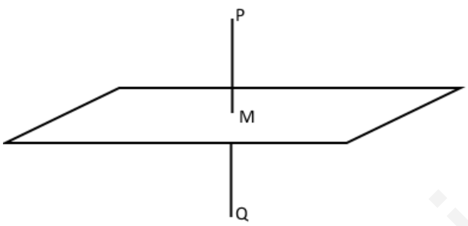
Los vectores unitarios pedidos son $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$

b) El ángulo que forma recta y plano es el arcsen del ángulo que forman vector normal al plano y vector director de la recta. En nuestro caso, el vector normal al plano n es (1, -1, 1) y el vector director de la recta es (2, -2, 2). Resulta obvio que al ángulo que forman es 0º. De todos modos calculamos

Cos α = $\frac{|u.v|}{|u||v|} = \frac{6}{\sqrt{3}.\sqrt{12}} = 1$. Si cos α =1, sen α = 0.

Arcsen 0 = 0º.

c)



Sea P (0,0,0). El simétrico de P, respecto del plano es el punto Q, de forma que M es el punto medio de P y Q.

El plano tiene por ecuación x – y + z – 2 = 0

La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es $x = -y = z$

Resolviendo el sistema con el plano, resulta que 3x = 2; x = 2/3; y = -2/3; z = 2/3.

Por tanto hemos obtenido las coordenadas de M.

Pero P+Q/2 = M, de donde Q = 2M – P = (4/3, -4/3, 4/3)

16**. Los lados de un triángulo están sobre las rectas**

$$\boldsymbol{r}: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \quad \boldsymbol{s}: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \\ z = -1 \end{cases} \quad \boldsymbol{t}: \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Calcula los vértices del triángulo. ¿Es un triángulo rectángulo? Razona la respuesta.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene al triángulo. Calcula la intersección del plano con los ejes OX, OY, OZ. (Santiago, septiembre, 2006)

a) Para hallar los vértices hay que intersecar las rectas dos a dos. r y s determinan un punto de corte que es (1, 1, -1). r y t se cortan en el punto (3, -1, 3) y s y t se cortan en el punto (-1,-1,-1)

Para ver si es rectángulo hay que determinar si entre los ángulos que forman hay alguno de 90º, es decir si un par de vectores directores tienen producto escalar 0.

El vector director de r es (1, -1, 2), el vector de s es (1, 1, 0) y el de t (1, 0, 1). El producto escalar del vector de r y el de s es nulo, por tanto s y t forman un ángulo de 90º y el triángulo es rectángulo.

b) Tomo el punto (1, 1, -1) y los vectores de s y t

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \;\; (x-1)-(y-1)-(z+1)=0;$$

$$x-y-z-1=0$$

Corte con el eje OX (y=z=0) x = 1 (1, 0,0)
Corte con el eje OY (x=z=0) y = -1 (0, -1, 0)
Corte con el eje OZ (x=y=0) z = -1 (0, 0, -1)

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.- a) Calcula m para que los puntos A(2,1,-2), B(1,1,1) y C(0,1,m) estén alineados.

b) Calcula el punto simétrico del punto P (-2, 0,0) respecto de la recta que pasa por los puentos A (2,1,-2) y B (1,1,1) (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 2.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$; $s: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa.
b) Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 3.- a) Los puntos A(1,1,0), B(0,1,1) y C (-1,0,1) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. Calcula las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo.

c) Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto B(0,1,1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A(1,1,0) y C (-1,0,1). (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 4.- Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$; $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$

a) Estudiar su posición relativa
b) Calcular la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

(Santiago, junio 2007)

Ejercicio 5.-

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que pasa por el punto P(1,1,2) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
b) Calcula el área del triángulo que tienepor vértices los puntos de intersección del plano $\boldsymbol{\pi}$: x - 2y + 2z - 3 = 0 con los ejes de coordenadas. ¿Es un triángulo rectángulo? (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6.-

a) Dados los planos $\pi_1: x - 2y + 2z - 1 = 0$; $\pi_2: \begin{cases} x = 2 + 2\alpha + 2\mu \\ y = 2\alpha - 2\mu \\ z = 1 + \alpha - 3\mu \end{cases}$ estudiar su posición relativa y calcular la distancia entre ellos.
b) Dado el punto P(2,1,7), calcula su simétrico respecto al plano π_2 (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 7.- Dadas las rectas $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$; $s: \begin{cases} x = 1 + 6\alpha \\ y = 4\alpha \\ z = -4\alpha \end{cases}$ estudiar su posición relativa y calcular la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,1,1) y contiene a r. (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 8.-

a) ¿Son coplanarios los puntos A(1,0,0), B (3,10), C(1,1,1) y D(3, 0-1)? En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.
b) Calcula el punto simétrico del punto P (0,0,1) respecto del plano x-2y+2z-1=0 (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 9.- Sea r la recta que pasa por los puntos P(0,8,3) y Q(2,8,5) y s la recta $s: \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcular el punto de corte.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene a r y s. (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 10.- Sean π el plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(2,3,2), C(3,1,0) y r la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$

a) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano. Calcula el punto de intersección de la recta y el plano.
b) Calcula los puntos de la recta que distan 6 unidades del plano. (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 11.- Dados los planos $\pi\pi_1: x + y + z - 1 = 0, \pi_2: y - z + 2 = 0$, y la recta $r: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

a) Calcula el ángulo que forman ambos planos. Calcula el ángulo que forma π_1 y r.
b) Estudia la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los dos planos. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 12.-

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,35) y es perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = -1 + 2m \\ y = 2 + 2m + n \\ z = 2 + 3m + n \end{cases}$
b) Calcula la distancia del punto P(2,3,5) al plano π que está más próximo al punto P(2,3,5). (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 13.- Sea r la recta que pasa por el punto P(1, -1,2) y es perpendicular al plano x + 2y + 3z +6 = 0. Sea s la recta que pasa por los puntos A(1,0,0) y B(-1,-3,-4)

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.
b) Calcula la distancia del punto A(1,0,0) al plano que pasa por el punto P(1,-1,2) y es paralelo al plano x + 2y + 3z +6 = 0. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 14.- Dada la recta $r\colon \begin{cases} y = 1 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano π que pasa por el punto Q(0,2,2) y contiene a la recta r. Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección de π con los ejes de coordenadas.
b) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 15.- Dada la recta $r\colon \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 3x + 5y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación general del plano π perpendicular a r y que pasa por el punto P(2, -1, -2)
b) Calcula el punto Q en el que la recta corta a π. Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los planos coordenados. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 16.- Dadas las rectas $r\colon \begin{cases} x = 3 - 3\alpha \\ y = -4\alpha \\ z = -6 \end{cases}$ $\quad s\colon \begin{cases} 4x - 3y - 12 = 0 \\ 5y - 4z - 4 = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa. Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman r y s.
b) Calcula, si existe, el plano que las contiene. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 17.-

a) ¿Son coplanarios los puntos A(1, 0,2), B(0,-1,1), C(-1,-2,0) y D(0,2,2)? Si existe, calcula la ecuación del plano que los contiene.
b) Calcula la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que es perpendicular al plano 2x + y – 3z + 4 = 0 y contiene a la recta que pasa por los puntos P(-1.1,2) y Q(2,3,6) (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 18.-

a) Calcula la ecuación del palno que pasa por el punto P(1, 2,-3) y es perpendicular a la recta $r\colon \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$
b) Calcula la distancia *d* del punto Q(-1,0,-2) al plano x – 2y + 3z +12 = 0. Calcula, si existe, otro punto de la recta r que también diste *d* del plano dado. (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 19.-

a) Dado el plano $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto P(1, -2,1) y es perpendicular a π. Calcula el punto de intersección de r en π

b) ¿Están alineados los puntos A(2, 0, 3), B(0, 0, 1) y C (2, 1, 5)? Si no están alineados, calcula la distancia entre el plano que determinan estos tres puntos y el plano π del apartado a) (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 20.- Dados los puntos A(3,0,2), B(-1,2,0), C(1,-1,3) y D(α, α-2, -α)

a) Determina el valor de α para que A, B, C y D sean coplanarios. ¿Para algún valor de α son A, B, C y D, vértices de un paralelogramo?

b) Calcula las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta r que pasa por los puntos A y B. (Santiago, junio 2021)

Ejercicio 21.- Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(-1,5,0) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta:

$r: \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 22.- Dado el plano π: x – 2y +3z + 6 = 0

a) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.

b) Calcula la ecuación general del plano que es perpendicular al plano π, paralelo a la recta que pasa por los puntos B(0,3,0) y C(0,0,2) y pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π: x – 2y + 3z + 6 = 0 (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 23.-

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x + y + z - 5 = 0$ y el plano $\pi_2: \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$ Si se cortan en una recta, escribe las ecuaciones paramétricas de la misma.

b) Calcula la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π_1 y π_2. Calcula la intersección de π_1, π_2 y π_3 (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 24.- Dados el plano $\pi; x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de r en π. Calcula la distancia de r a π.

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 25.

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinando por los puntos A(1, 0,2), B (2, 1, 3) y C (3, 0, 0).
b) Calcula los posibles valores de a para que el punto P (a,a,a) equidiste de la recta r y del plano del apartado anterior. (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 26. Dadas las rectas $s: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$ $r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte. Si determinan un plano, calcula la ecuación general o implícita de ese plano.
b) Estudia la posición relativa de r y el plano $\pi: 4x - 4y + 2z + 7 = 0$. Calcula la distancia de r a π. (Santiago, septiembre 2013)

Ejercicio 27.

a) Dado el plano $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda + \mu \\ y = -3\lambda + \mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{cases}$ calcula las ecuaciones en forma continua de la recta r que pasa por el punto P(2, -3, -4) y es perpendicular al plano α dado. Calcula el punto de corte de r con el plano α.
b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos P(2, -3,-3,) y Q)3, -2, -4) y es perpendicular al plano α.
c) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del plano $\beta: 5x - 4y + z - 19 = 0$ con el plano α (Santiago, septiembre 2013)

TEMA V

CÁLCULO DIFERENCIAL

Definición: Se llama *función real de variable real* a toda correspondencia de ℝ en ℝ, de forma que a cada elemento de ℝ se le asocia *uno o ningún* elemento de ℝ. El conjunto de elementos de ℝ a los que se le asocia un número real mediante la función, se le denomina *Dominio de la función.*

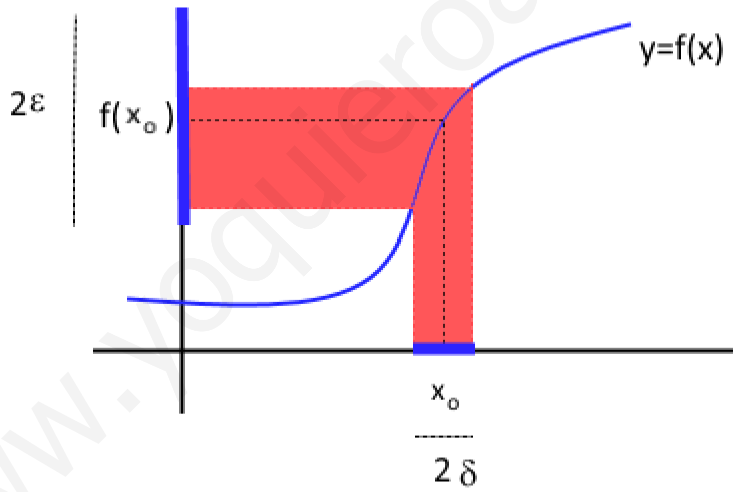
Dom (f) = {x∈ ℝ/$f(x) \in$ ℝ}

Definición.- Una función f(x) es continua en un punto $x_o \in$ Dom (f) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

En términos de entornos:

Para todo entorno centrado en $f(x_o)$ y radio ε, existe un entorno centrado en x_o y de radio δ, de modo que las imágenes, mediante la función, de todos los elementos del entorno de radio δ, alcanzan el interior del entorno de radio ε



Equivalentemente, se dice que una función f es continua en un punto x_o si se verifica:

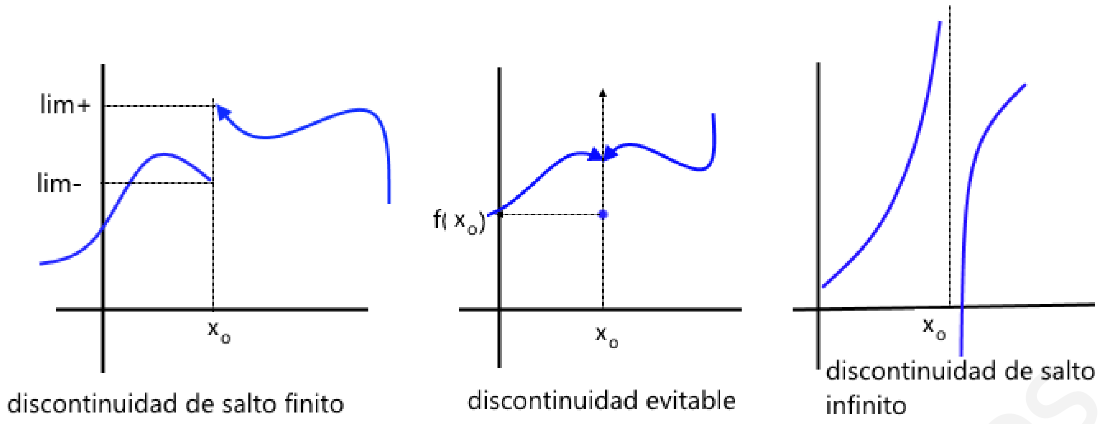
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) \qquad (1)$$

Cuando las funciones estén definidas lateralmente, la existencia del límite requiere que el limite por la derecha y por la izquierda coincidan, es decir

$$\lim_{x \to x_o+} f(x) = \lim_{x \to x_o-} f(x) = f(x_o)$$

Tipos de discontinuidad:

Cuando la igualdad (1) no se da, la función es discontinua y se pueden presentar los siguientes casos:



Discontinuidad de salto finito:

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) \neq \lim_{x \to x_o -} f(x)$$

Discontinuidad evitable

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) = \lim_{x \to x_o -} f(x) \neq f(x_o)$$

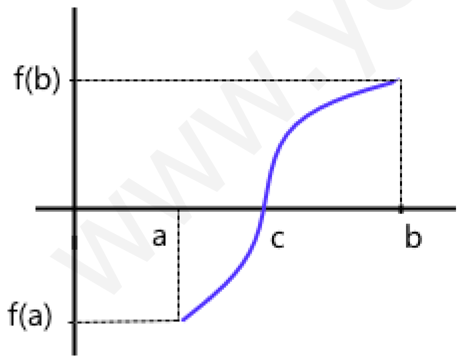
Discontinuidad de salto infinito

$$\lim_{x \to x_o +} f(x) \; o \; \lim_{x \to x_o -} f(x) = \pm\infty$$

Teorema de Bolzano (Existencia de las raíces de una función)

Sea f una función real de variable real.

$$\begin{matrix} f \; continua \; en \; [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{matrix} \Longrightarrow \exists c \in a, b / f(c) = 0$$

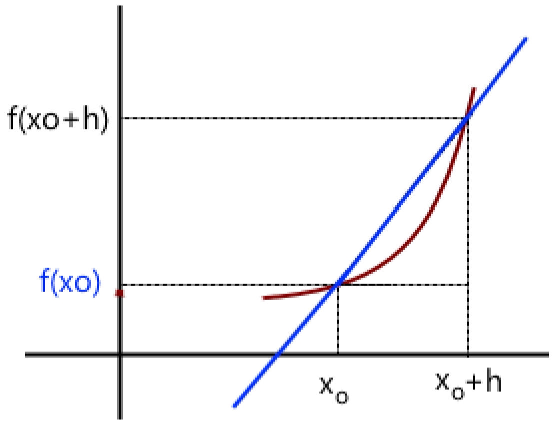


El punto c, cuya existencia garantiza el teorema de Bolzano no tiene porque ser único.

Derivada de una función en un punto.

Si tomamos un incremento del punto xo, h>0, se llama cociente incremental de la función f en el punto xo e incremento h, al cociente:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$



Llamamos derivada de la función f(x) en el punto xo, al límite de ese cociente incremental cuando h tiende a 0, es decir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Se representa por f'(xo).

Como x_0+h varía en función de h, podemos hacer un cambio de variable, mediante la igualdad $x_0+h=x$. Es obvio que si h tiende a 0, x tiende a x_0. Por tanto también se puede definir la derivada de una función en un punto, del siguiente modo:

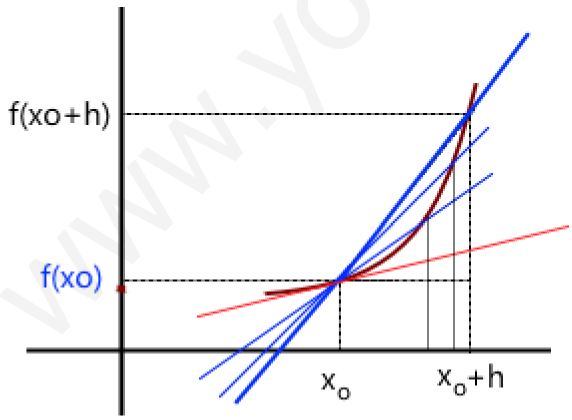
$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto:

Si nos fijamos en la figura anterior, observamos que la pendiente de la recta secante a la función en los puntos xo y f(xo+h) es precisamente el cociente incremental

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_o)}{h}$$

Ahora bien, si h la vamos haciendo cada vez más pequeña, observamos como la secante va convergiendo hacia la recta tangente a la función en el punto x_o, por tanto *la derivada es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto* x_o.



Definición.- Se dice que una función f, continua en x_o, es derivable en un punto x_o, cuando existe $f'(x_o)$

Derivada de una suma: $(f+g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$

Derivada de un producto:

$$(f.g)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + g'(x_o)f(x_o)$$

Derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - g'(x_o)f(x_o)}{g(x_o)^2}$$

Derivada de una composición (Regla de la cadena)

$$(gof)'(x_o) = g'(f(x_o))f'(x_o)$$

PROPOSICIÓN.- Si f es derivable es xo entonces es continua en xo (El recíproco no es cierto)

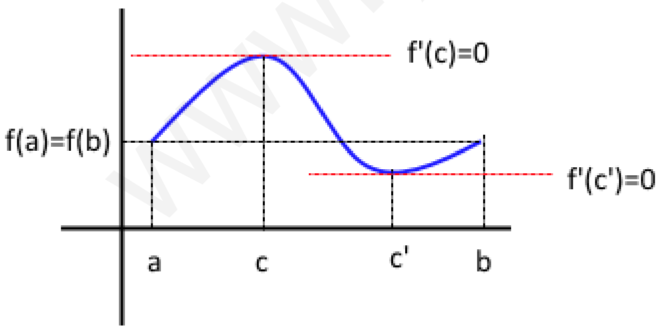
Tabla de derivadas de algunas funciones elementales:

FUNCION	DERIVADA	FUNCION	DERIVADA
k (constante)	*0*	*lnx*	*1/x*
x	*1*	$log_a x$	$\frac{1}{x} ln\, a$
x^n	nx^{n-1}	e^x	e^x
a^x	$a^x\, ln\, a$	*senx*	*cosx*
cosx	*-senx*	*tagx*	$\frac{1}{cos^2 x}$
arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*arccosx*	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctagx	$\frac{1}{1+x^2}$		

Teorema de Rolle (Existencia de las raíces de la derivada)

$$\left.\begin{array}{l} f\ continua\ en\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$$

Interpretación geométrica del Teorema de Rolle:

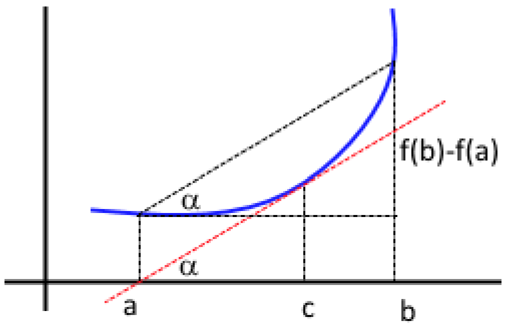


En las hipótesis del Teorema de Rolle, existe al menos un valor c en el interior de (a, b) de modo que la recta tangente en ese punto tiene pendiente nula.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial

$$\left.\begin{array}{r} f\ continua\ [a,b] \\ f\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \rightarrow \exists c \in a,b / f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Interpretación geométrica:



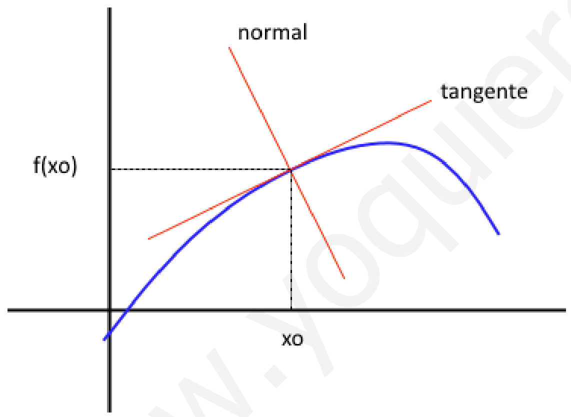
Vemos que la pendiente de la recta secante es

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

que coincide con la pendiente de la tangente a la curva en el punto c, f'(c)
O en otras palabras, existe un punto c en el interior de (a,b) de modo que la tangente en ese punto es paralela a la secante de extremos (a,f(a)) y (b,f(b))

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecuación de la tangente y la normal a una función en un punto xo



Si tenemos una función derivable en un punto xo, tenemos f(xo) y f'(xo). De la interpretación geométrica de la derivada, se sabe que la recta tangente a la función en el punto xo es la recta que pasa por (xo, f(xo)) y tiene por pendiente f'(xo). Aplicando la ecuación punto-pendiente de la recta, la ecuación buscada es:

$$y - f(xo) = f'(xo)(x - xo)$$

La recta normal a la función en xo es la perpendicular a la tangente en dicho punto. Dado que dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es -1. La pendiente de la recta normal es $\frac{-1}{f'(xo)}$ por lo que la ecuación de la recta normal es:

$$y - f(xo) = \frac{-1}{f'(xo)}(x - xo)$$

Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

Cuando nos encontramos antes las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ independientemente de a lo que tienda x, se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

97

Siempre que se verifiquen las condiciones de derivabilidad exigibles en f y g para obtener el límite. Esta es llamada la Regla de l'Hôpital.
Mediante prodecimientos algebraicos, todas las indeterminaciones restantes, tales como
$0.\infty$ $\infty - \infty$ 1^{∞} 0^0 ∞^0 las vamos a transformar en $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ para poder aplicar la regla.

Ejemplo de la intetermінación $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{1} = 1$

Ejemplo de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$

Ejemplo de la indeterminación $0.\infty$: $\lim_{x\to 0} x\ln senx = \lim_{x\to 0}\frac{\ln senx}{1/x}$ que es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
y aplicando la regla de l'Hôpital, queda $\lim_{x\to 0}\frac{\ln senx}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{cotgx}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x^2 cotgx = 0$

Ejemplo de la indeterminación $\infty - \infty$: $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right]$ que es $\frac{0}{0}$
y aplicando la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right] = 0$

Ejemplo de la indeterminación 1^{∞} : $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$. Cuando se trata de una indeterminación de tipo exponencial, se calcula el logaritmo del límite, es decir:
$\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \frac{1}{x}\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[(1+x)]$ que es del tipo $\frac{0}{0}$
Aplicando l'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[(1+x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$; por tanto el límite inicialmente buscado es $e^1 = e$
El resto de las indeterminaciones exponenciales, se hace de forma análoga a la anterior.

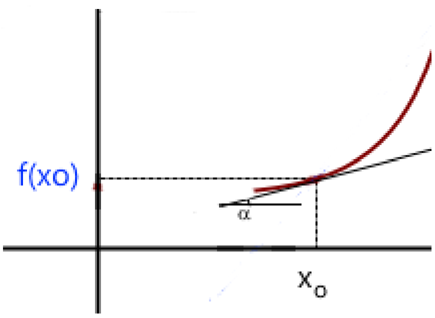
Es importante destacar que la regla solo es aplicable a las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$

Crecimiento y extremos relativos de una función:

Mediante la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto, vamos a dar una serie de proposiciones que las ilustraremos gráficamente en ausencia de una demostración rigurosa:

PROPOSICIÓN.- Si f'(xo) > 0, entonces f es creciente en x_o

Dado que f'(xo) es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto, Si f'(xo) >0 la recta tangente en dicho punto tiene pendientes positiva, esto ocurre solamente si la función es creciente en xo



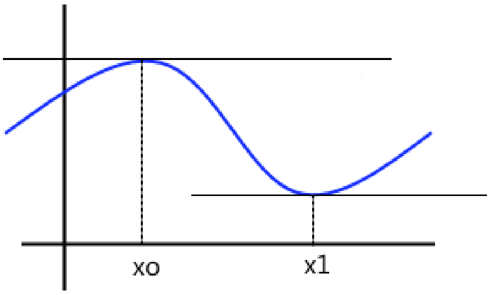
Obsérvese como la recta tangente en x_o tiene pendiente positiva (tagα > 0)

Análogamente, si Si f'(x_o) < 0, entonces f es decreciente en x_o.

Definición.- Si una función es continua en xo, se dice que presenta un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando la función en xo cambia de creciente a decreciente (máximo) o de decreciente a creciente (mínimo).

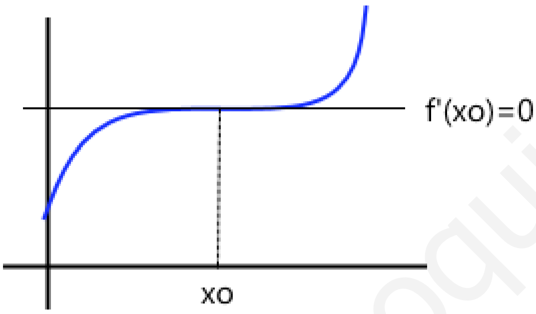
PROPOSICIÓN.

Si la función es derivable en x_o, y presenta un máximo o un mínimo relativo, entonces f'(x_o)=0 (El recíproco no tiene porque ser cierto)



En x_o la función presenta un máximo relativo y en x_1, un mínimo relativo.
En ambos casos la recta tangente es horizontal, es decir de pendiente nula.
Así pues, por la interpretación geométrica de la derivada, tanto f'(x_o) como f'(x_1) se anulan.

Que el recíproco no es cierto, podemos verlo en la siguiente gráfica:



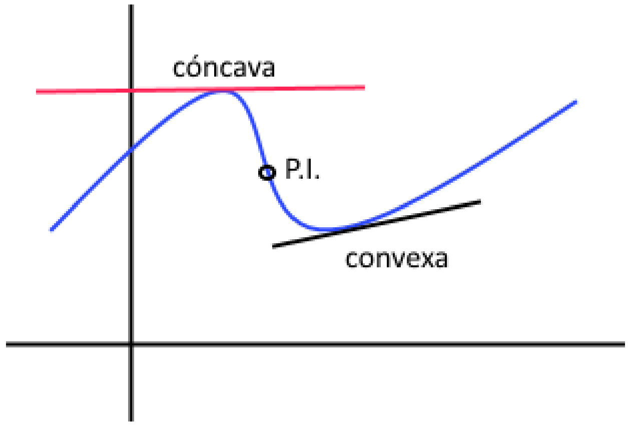
Vemos que la función en x_o no presenta ni máximo ni mínimo relativo, y sin embargo la recta tangente es horizontal.

Véase como ejemplo $f(x) = x^3$

Criterio de la segunda derivada para la determinación de extremos relativos.

$$Si\ f'(xo) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Si\ f''(xo) < 0\ \ En\ xo\ hay\ un\ máximo\ relativo \\ Si\ f''(xo) > 0\ \ En\ xo\ hay\ un\ mínimo\ relativo \\ Si\ f''(xo) = 0\ el\ criterio\ no\ decide \end{cases}$$

***Definición*.-**
Diremos que una función es *cóncava* en un punto xo, cuando la recta tangente a la función en dicho punto queda por encima de la gráfica de la función en un entorno del punto.
Por el contrario, la función es convexa cuando la tangente queda por debajo de la gráfica de la función en un entorno de dicho punto



PROPOSICIÓN

Si la función es dos veces derivable en xo y f''(xo) >0, entonces la función es convexa en xo.

Si la función es dos veces derivable en xo y f''(xo) <0, entonces la función es cóncava en xo.

Definición.- Se llama punto de inflexión a aquel donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

PROPOSICIÓN

Si la función es dos veces derivable en xo y presenta un punto de inflexión en xo, entonces f''(xo) = 0.

Representación gráfica de funciones:

Los elementos a utilizar en la representación gráfica de funciones serán:

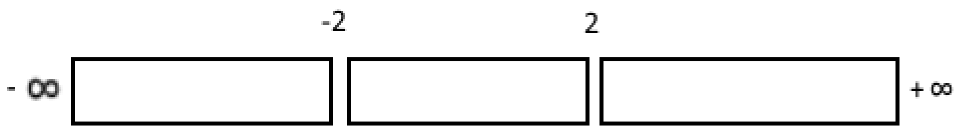
Dominio de la función, Puntos de corte con los ejes, signo de la función, Simetrías, Crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, Asíntotas, Concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Veamos un ejemplo donde estudiaremos todos los aspectos anteriores:

Veamos la gráfica de la función $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

<u>Dominio</u>:

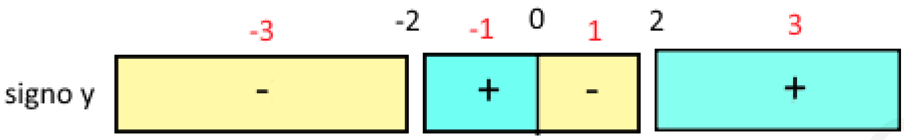
Como se trata de un cociente de polinomios, el dominio es todo R, salvo los puntos que anulan el denominador, por tanto el dominio es R-{2, -2} que expresado en intervalos sería (-∞ , -2) U (-2 , 2) U (2 , +∞)



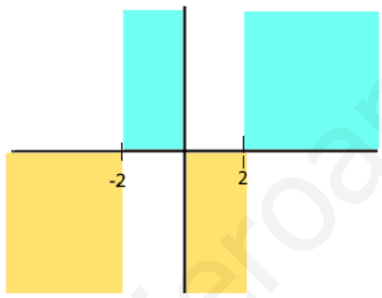
Cortes con los ejes:
Eje x (y = 0) ; x = 0. Corta en el punto (0 , 0)
Eje y (x = 0) ; y = 0. Corta en el punto (0 , 0)

Signo de la función:

Sobre el dominio, extraemos los puntos que anulan la función (corte con eje y), en nuestro caso x = 0. En los intervalos que nos quedan estudiamos el signo de la función que establecerá cuando la gráfica está por encima (positiva) o por debajo (negativa) del eje OX. Para ello basta tomar cualquier valor dentro del intervalo (ya separados) y ver que signo toma la función en dicho valor; ese signo se mantiene en todo el intervalo.



Esto nos determina las regiones del plano por donde pasará la función:



Simetrías:

Hay dos tipos de simetrías:
a) Simetría respecto el eje OY o simetría par, cuando f(x) = f(-x)
b) Simetría respecto al origen o simetría impar, cuando f(-x) + f(x) = 0

En nuestro caso se descarta la simetría par por la figura anterior. Veamos si la hay impar

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$; $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-4}$ Es obvio que f(-x) + f(x) = 0

Por tanto hay simetría impar.

Asíntotas:
Una asíntotas es una recta que dirige la "marcha" de la gráfica de la función cuando esta se aleja hacia el infinito, de modo que cada vez se acerca más a la recta sin llegar a cortarla[4]
Hay tres tipos de asíntotas:

[4] Es un error creer que la asíntota y la función nunca se cortan. Es importante subrayar que una asíntota puede cortar a la función en las proximidades del origen, puesto que su funcionalidad es cuando se aleja hacia el infinito. Por eso, en algunas ocasiones, se suele estudiar un apartado que consiste en averiguar los puntos de corte de las asíntotas con la gráfica.

Asíntota horizontal: y = k de modo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$
Asíntota vertical: x = k de modo que $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$
Asíntota oblicua: y = mx + n
de modo que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

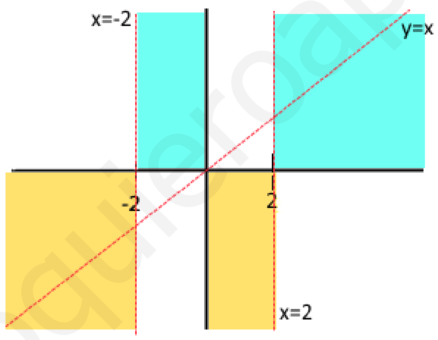
En el caso de cocientes de polinomios hay asíntotas horizontales si los grados del numerador y denominador son iguales; asíntotas oblicuas, si el grado del numerador supera en una unidad al del denominador; las asíntotas verticales son las rectas que pasan por los valores de x que no están en el dominio.

En nuestro ejemplo hay dos asíntotas verticales que son x = 2 y x = -2, puesto que
$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$

No hay asíntota horizontal, puesto que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Hay una asíntota oblicua que es: y = x
Puesto que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

Dibujamos las asíntotas:



Crecimiento y extremos

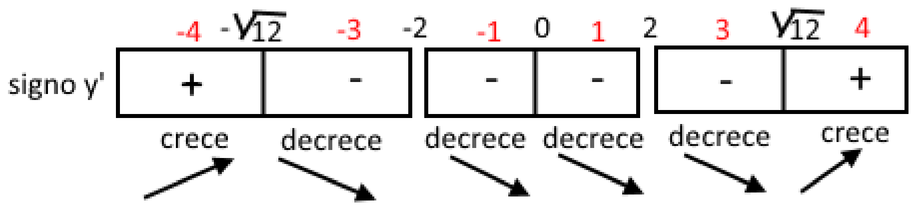
El proceso es análogo al estudio del signo de la función, pero ahora lo que se trata de estudiar es el signo de la función derivada que, según las proposiciones vistas anteriormente, determinará el crecimiento o decrecimiento dependiendo de si el signo es positivo o negativo respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

En primer lugar hay que ver donde la función derivada se anula. Esto es:

$$x^4 - 12x^2 = 0;\ x^2(x^2-12) = 0$$

Se anula para tres valores de x: $-\sqrt{12}$, 0 , $-\sqrt{12}$

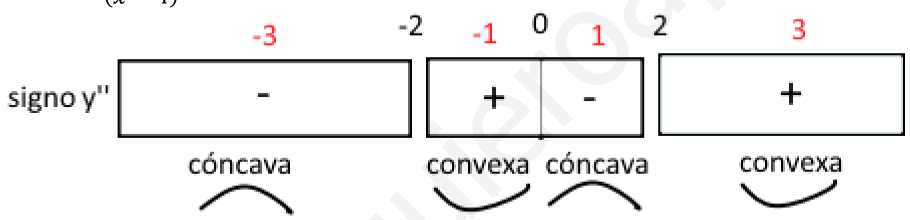


La función es creciente en (-∞, -$\sqrt{12}$) U ($\sqrt{12}$, +∞)
Es decreciente en ($-\sqrt{12}$, -2) U (-2, 0) U (0 , 2) U (2, $\sqrt{12}$)
Veamos donde cambia de creciente a decreciente o viceversa:
En $-\sqrt{12}$ presenta un máximo y en $\sqrt{12}$ un mínimo, cuyas imágenes respectivas, sustituidas en la función, son: $3\sqrt{3}$ y $-3\sqrt{3}$

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión:

El proceso es análogo al estudio del signo de la función, pero ahora lo que se trata de estudiar es el signo de la función derivada segunda que, según las proposiciones vistas anteriormente, determinará la convexidad o concavidad dependiendo de si el signo es positivo o negativo respectivamente.

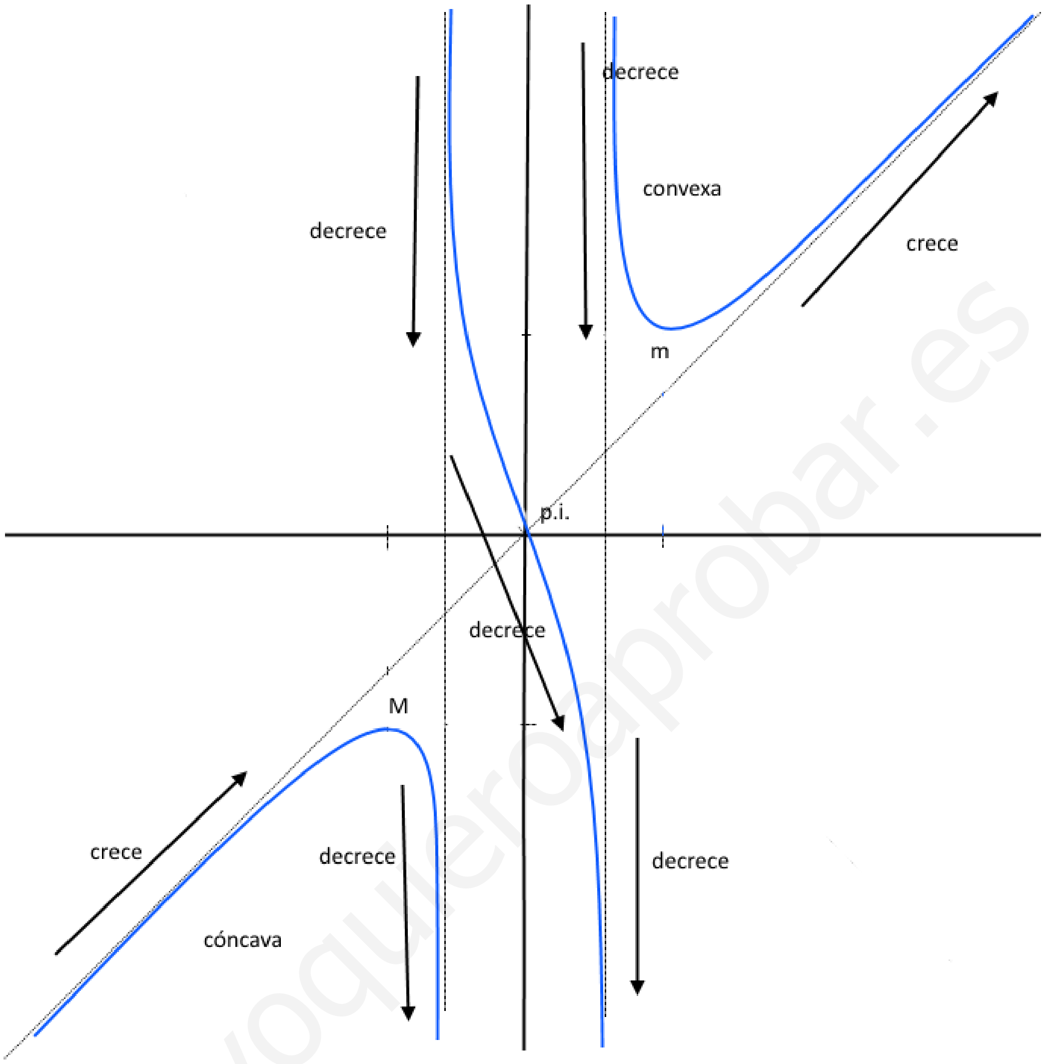
$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ que se anula para $x = 0$



La función es cóncava (-∞ , -2) U (0 , 2)
La función es convexa (-2 , 0) U (2 , +∞)

La función cambia de cóncava a convexa en x = -2 y en x=2, pero ambos puntos no están en el dominio, por tanto no hay puntos de inflexión.
Sin embargo cambia de convexa a cóncava en x= 0 y ahí hay un punto de inflexión
Punto de inflexión (0,0)

El resultado final, sería la siguiente gráfica en azul.

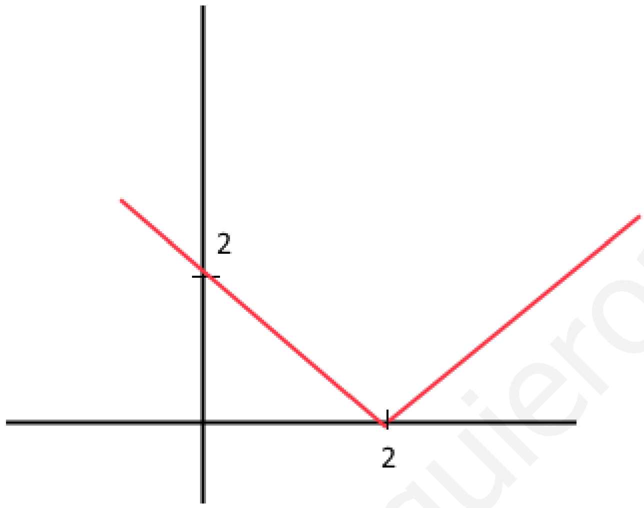


104

PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS

1**. ¿Puede haber dos funciones distintas que tengan igual función derivada? Si la respuesta es afirmativa, ponga un ejemplo. Si, por el contrario es negativa razónela.**
Calcular la derivada de la función f(x) = |x-2| en x = 2, si es posible. Represente la gráfica de la función y sobre ella razones su respuesta. (Santiago, septiembre 2001)

SOLUCIÓN:
En efecto puede haber dos funciónes distintas con igual función derivada. Ejemplos: $F(x) = x^2$ y $G(x) = x^2 + 7$. Eso sí, siempre difieren en una constante.



Se observa que en x= 2 la función no es derivable por presentar pendiente negativa a la izquierda y pendiente positiva a la derecha sin que en x= 2 se igualen las pendientes de las rectas tangentes.
En otras palabras la derivada por la derecha y por la izquierda no coinciden.

f(x) = $\begin{cases} x-2 & x-2>0 \quad x>2 \\ 2-x & x-2<0 \quad x\leq 2 \end{cases}$ la función es continua en 2, pero no es derivable en 2, puesto que:

$f'_+(2)$= 1 y $f'_-(2)$= -1 Ambas no coinciden y por tanto no es derivable en x=2

2. **Dada $F(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-4}$ escriba la ecuación de la secante a F que une los puntos (-2, F(-2)) y (2, F(2))**
¿Existe un punto c en el intervalo [-2,2] verificando que la tangente a la gráfica de F en (c, F(c)) es paralela a la secante que halló? En caso afirmativo razone su respuesta y calcule c, en caso negativo razone por qué no existe. (Santiago, junio 2002)

SOLUCIÓN: Se trata de calcular la ecuación de la recta en el plano que pasa por los puntos (-2, -5/3) y (2, -1). El vector director es (4, 2/3) → (12, 2). La pendiente es 1/6
La ecuación pedida es y + 1 = 1/6 (x -2)

Teniendo en cuenta el teorema del valor medio del cálculo diferencial que dice:

Si f es continua en [a, b] y f es derivable en (a,b), entonces existe c$\in [a,b]$ verificando que f'(c) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En nuestro caso debemos ver si se verifican las hipótesis en el intervalo [-2,2]

F es continua en [-2, 2] porque la única discontinuidad la presenta en x=4$\notin [-2,2]$

F es derivable en (-2,2) puesto que F'(x) = $\frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x+2)}{(x-4)^2} = \frac{x-2}{x-4}$ que no es derivable en x=4.

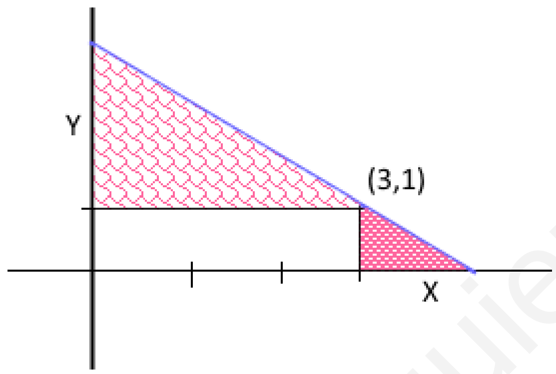
existe c$\in [a,b]$ verificando que f'(c) = 1/6 que coincide con la pendiente de la secante hallada.

$\frac{c-2}{c-4} = \frac{1}{6}$; 6c – 12 = c -4 ; 5c = 8; c = 8/5.

3. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,1) y tal que el área del triángulo formado por esta recta y los semiejes positivos de coordenadas sea mínima.

(Santiago, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:



La función que hay que hacer mínima es el área A(x,y) = (x+3)(y+1)/2

Para establecer la relación entre x e y, fijémonos que los dos triángulos rectángulos indicados en la figura son semejantes, con lo que se verifica:

$\frac{x}{3} = \frac{1}{y}$, de donde xy = 3; y = 3/x

Sustituimos la expresión de y en la función A(x, y) y nos queda A(x) = (x+3)($\frac{3}{x} + 1)/2$

A(x) =$\frac{3+\frac{9}{x}+x+3}{2}$ A'(x) = $\frac{\frac{-9}{x^2}+1}{2} = \frac{x^2-9}{2x^2}$ A'(x) se anula para x = 3 y x = -3. Descartamos la solución negativa porque no forma parte del dominio útil de la función. Por tanto la solución es x = 3 e y = 1. La recta que hace el aérea máxima corta a los ejes en los puntos (6,0) y (0,2). Su ecuación es y = -1/3 (x -6)

4. **Hallar la condición que debe cumplir a, para que el polinomio $x^4 + x^3 + ax^2$ sea cóncavo en algún intervalo. Determinar el intervalo de concavidad en función de a. (Santiago, junio 2003)**

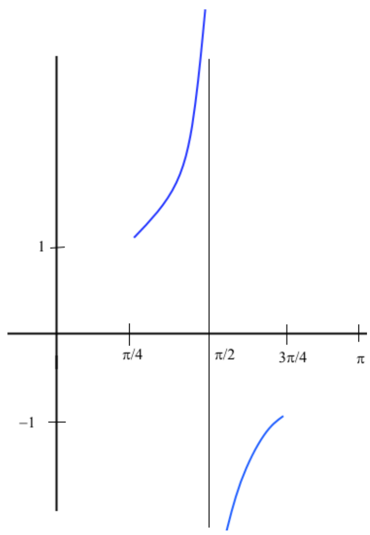
Hallamos la segunda derivada que es $12x^2+6x+2a < 0$

Obsérvese que es una parábola convexa, por lo que para que sea negativa en algún intervalo, ha de tener dos raíces reales, esto quiere decir que el discriminante

36 – 4.12.2a > 0 ; 36 – 96 a > 0; a < $\frac{36}{96} = \frac{3}{8}$

Una vez establecido el valor que ha de tener a para que la segunda derivada se anule en dos valores que son: $\frac{-3-\sqrt{6-16a}}{12}$ y $\frac{-3+\sqrt{6-16a}}{12}$. La función será cóncava en el intervalo de extremos esos valores.

5. ¿Se puede asegurar, empleando el teorema de Bolzano, que la función f(x) = tag (x) tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ¿ Razone la respuesta. Esboce la gráfica de f en ese intervalo. (Santiago, junio 2003)



La función tag (x) no verifica la hipótesis de continuidad en el intervalo dado, porque la tag (x) no es continua en $\frac{\pi}{2}$ que está en ese intervalo. Así pues no se puede asegurar.

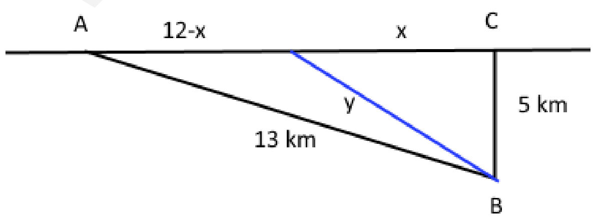
Como se observa en la gráfica, la función no es continua en $\pi/2$
Y además se ve como no corta al eje de las x.

6. Dada la parábola f(x) = $ax^2 + bx + c$, determine los valores de a, b y c sabiendo que f tiene un máximo en el punto de abscisa x = -1/2 y la recta tangente a f en el punto (1,3) es y = -3x + 6.

f'(x) = 2ax + b

f'(-1/2) = 0 ; -a +b = 0
f(1) = 3 ; a + b + c = 3 Resolviendo este sistema tenemos a = -1, b= -1, c = 5.
f'(1) = -3; 2a + b = -3

7. Un barco B y dos ciudades A y C de la costa forman un triángulo rectángulo en C. Las distancias del barco a las ciudades A y C son 13 Km y 5 Km, respectivamente. Un hombre situado en A desea llegar hasta el barco B. Sabiendo que puede nadar a 3 Km/h y caminar a 5 Km/h ¿a qué distancia de A debe abandonar la costa para nadar hasta B si quiere llegar lo antes posible? (Santiago, junio 2004)



Por el teorema de Pitágoras, enseguida deducimos que la distancia entre A y C es 12.
La función que hay que minimizar es la función tiempo.
Al nadar 3 = y/t. De donde t = $\frac{y}{3}$
Sabemos que $y = \sqrt{x^2 + 25}$

Caminando 5 = 12-x/t'. De donde t' = $\frac{12-x}{5}$

Por tanto el tiempo invertido es t' + t = $\frac{12-x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{12-x}{5}+\frac{\sqrt{x^2+25}}{3}$. Derivando la función tiempo T'(x) = $\frac{-1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}$ Igualando a 0. $\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}=\frac{1}{5}$ 5x = $3\sqrt{x^2+25}$

$25x^2=9x^2+225$; $16x^2 = 225$ x = 15/4.
Por tanto la distancia de A a la que se tiene que arrojar al agua es 12 – 15/4 = 33/4 Km.

8. Calcular el $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})\sqrt{3n+5}$ indicando que tipo de indeterminación se presenta al intentar resolver este límite. (Santiago junio 2004)

La primera indeterminación que se presenta es ∞ - ∞ en la expresión $(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})$
Para evitarla, multiplico y divido por el conjugado de esa expresión:

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})\sqrt{3n+5}\,\frac{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3n+5}}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}$ = Aquí surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Divido por n^2 numerador y denominador:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3n+5}}{(\sqrt{n+7}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\sqrt{3+5/n}}{(\sqrt{1+7/n}+\sqrt{1})}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

9. Determinar las abscisas de los puntos de la curva $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 135º con el sentido positivo del eje de abscisas. (Santiago junio 2004)

Se trata de buscar en qué puntos, la pendiente de la tangente es tag 135º = -1
En otras palabras, la derivada vale -1.
Derivamos e igualamos: $x^2-2x-3=-1$ $x^2-2x-2=0$
La solución son $x=1\pm\sqrt{3}$

10. Estudiar la continuidad en toda la recta real de la función dada por
$\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases}\frac{sen(x)}{x} & si\ x>0\\ x+1 & si\ x\le 0\end{cases}$ **(Santiago, septiembre 2004)**

Sen(x)/x es continua en x>0 por ser cociente de funciones continuas en x>0.
X+1 es continua en x<0 por ser una recta.
Falta ver que ocurre en x = 0
f(0) = 1

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}x+1=1$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0+}\frac{cos(x)}{1}=1$$

Los límites laterales coinciden con la imagen en el punto, por tanto la función es continua en x = 0 y en particular en todo R.

11. Calcular la relación entre a y b para que sea continua en toda la recta real, la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax} - 1}{2x} & si\ x \neq 0 \\ b & si\ x = 0 \end{cases}$$

El problema se reduce a estudiar la continuidad en x = 0, pues en el resto es continua (cociente de continuas y constante)

f(0) = b ; $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{e^{ax}-1}{2x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{ae^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{ax} - 1}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0-} \frac{ae^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$

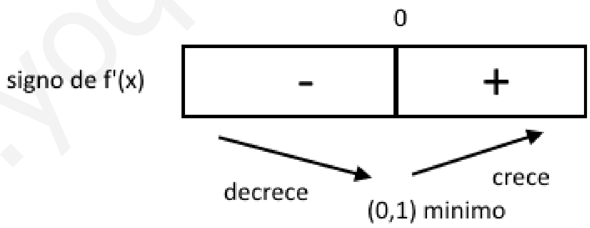
a/2 = b. a tiene que ser el doble de b.

12. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x+1)e^{-x}$ en el punto de corte de f(x) con el eje OX.
Calcula, para dicha función, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad. (Santiago, junio 2006)

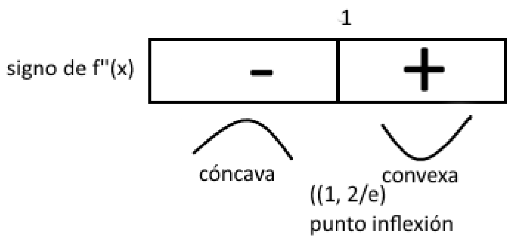
Primero estudiamos el punto de corte con el eje OX (y = 0): $(x+1)e^{-x} = 0$; x = -1

Para averiguar la pendiente de la tangente tenemos que calcular la derivada de la función para x = -1; $f'(x) = -xe^{-x}$ $f'(-1) = e$
La ecuación de la recta tangente pedida es: $y = e(x+1)$

Para estudiar el crecimiento y extremos hay que estudiar el signo de la primera derivada en su dominio que es R. Primero vemos donde se anula la derivada (en x = 0)

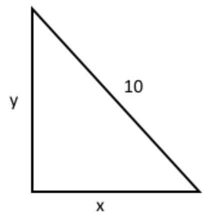


Para la concavidad y convexidad estudiamos el signo en la segunda derivada.
$f''(x) = (x-1)e^{-x}$. Se anula en x = 1



109

13. De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima. (Santiago, junio 2006)



La función que hay que hacer máxima es A(x,y) = $\frac{xy}{2}$

La relación entre x e y viene determinada por el teorema de Pitágoras, es decir $y = \sqrt{100 - x^2}$

A(x) = $\frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$

A'(x) = $\frac{1}{2}.\frac{-4x^3+200x}{2\sqrt{100x^2-x^4}} = 0$; $-4x^3 + 200x = 0$; $x = 0 \; y \; x = \sqrt{\frac{200}{4}}$. La solución x = 0 la descartamos por no formar parte del dominio útil del problema. Así pues la solución es x = $5\sqrt{2}$; y = $\sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

14. a) Calcula los valores de a y b para que la gráfica de $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$. Para esos valores de a y b, calcula: asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1}$ (Santiago, septiembre 2006)

solución a) : Como el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ pertenece a la gráfica f(1/2) = 4; es decir que $\frac{a}{2} + 2b = 4$

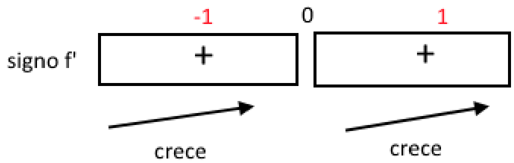
Como el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ es un mínimo f'(1/2) = 0; es decir que $a - 4b = 0$

De ambas ecuaciones resulta que a = 4 y b = -1

Asíntotas: Escribo la función así:

$f(x) = \frac{4x^2-1}{x}$. Verticales: x = 0; Horizontales no tiene; Oblicuas y = 4x

$f'(x) = \frac{4x^2+1}{x^2}$ No se anula:



Creciente en todo el dominio

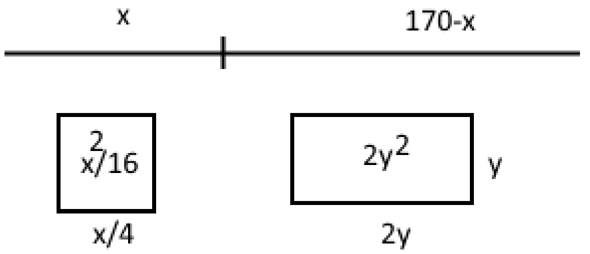
Solución b):

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1} = \frac{0}{0}$ Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{cos^2x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x(x+2)}{-2cosx.senx} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(x^2+4x+2)}{-2cos2x} = \frac{2}{-2} = -1$$

110

15. Un alambre de 170 cm. De longitud se divide en dos partes. Con una de las partes se quiere formar un cuadrado y con la otra un rectángulo de modo que la base mida el doble que la altura. Calcular las longitudes de las partes en las que se tiene que dividir el alambre para que la suma de las areas del cuadrado y del rectángulo sea mínima. (Santiago, septiembre 2006)



6y = 170 –x; $y = \frac{170-x}{6}$

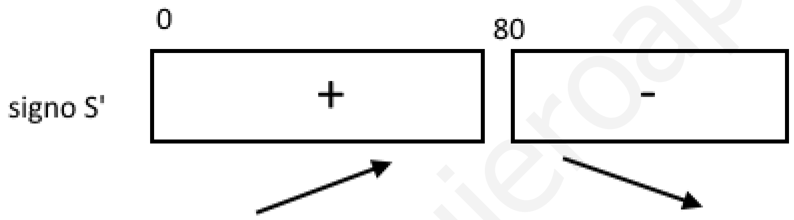
Area cuadrado: $\frac{x^2}{16}$

Area rectángulo $\frac{(170-x)^2}{18}$

La Suma de las áreas S (x) = $\frac{x^2}{16} + \frac{(170-x)^2}{18}$

S'(x) = $\frac{x}{8} + \frac{-(170-x)}{9}$ = 0; 9x – 8(170-x) = 0; x = 80

Hay que dividir el alambre en dos trozos, uno de 80 y el otro de 90 cm



En efecto

Hay un máximo para x = 80 en la función Suma de areas.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & si \quad x<2 \\ e^{2-x}+2 & si\; x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula a para que f(x) sea continua en x = 2. Para el valor obtenido de a, ¿es f(x) derivable en x = 2?

b) Dada g(x) = $ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a, b y ce para que g(x) tenga en el punto (1, -1) un mínimo relativa y la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0, sea paralela a la recta y = 4x. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 2.-

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Dada la función f(x) = x^3 -9x, calcula para f(x): puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 3.-

a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^x senx - x}{2x^2+x^4}$

b) Calcula los vértices del área del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté sobre el eje OX y los vértices del lado opuesto estén sobre la parábola Y = $-x^2 + 12$ (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 4.

a) Enunciado del teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo (1, 2)?

b) Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -\sqrt{2} \\ -x^2+2 & si\; x > -\sqrt{2} \end{cases}$. Es g continua en x = $-\sqrt{2}$? (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 5.

1. Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.
2. Sea f(x) = $e^x(2x-1)$. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x=0

Ejercicio 6

a) Calcula a, b, c , para que $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & si \;\; x \leq 0 \\ x+\ln(1+x^2) & si\; x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en R y tenga un extremo relativo en x = -2

b) Sea $g(x) = x(x-1), 0 \leq x \leq 2$. Razona si g(x) tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo [0,2]. En caso afirmativo, calcúlalos. (Santiago, septiembre, 2008)

Ejercicio 7 Calcula el valor de m para que $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2-1+cosx}{sen(x^2)} = 0$ (Santiago, junio 2008)

Ejercicio 8.-

a) Define función continua en un punto. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $f(x) = \frac{Ln(1+x^2)}{x}$ en x = 0

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = 2x^3 - 3x^2$

Ejercicio 9.

a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

b) Calcula un punto de la gráfica de la función $g(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ en el que la recta tangente sea paralela al eje OX, escribe la ecuación de esa recta tangente. Calcula las asíntotas, si las tiene, de g(x).

Ejercicio 10.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ en el punto de abscisa x = 0.

b) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 11.

a) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema de Bolzano. Dada la función $f(x) = e^x + 3xLn(1+x^2)$, justifica si podemos asegurar que su gráfica corta al eje OX en algún punto del intervalo [-1,0]

b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax+b & si\ x \leq 0 \\ sen(2x)+1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Sea continua y derivable en x = 0. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 12. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad. (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 13.

a) Define función continua en un punto. ¿Cuándo se dice que una discontinuidad es evitable? ¿Para qué valores de k, la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2+k}$ es continua en todos los puntos de la recta real?

b) Determina los valores de a, b, c, d para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0,4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0). (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 14.

a) Definición e interpretación geométrica de una función en un punto.

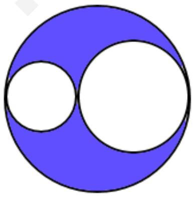
b) Calcula: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2cosx}{sen(x^2)}$ (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 15. Dibuja la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$, estudiando: dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad. (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 16.-

a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula el valor de k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-2,0] y para ese valor determina un punto del intervalo en el que se anule la derivada de f(x).
b) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 17.- En una circunferencia de radio 10 cm, se divide uno de sus diámetros en dos partes que se toman como diámetros de dos circunferencias tangentes interiores a ella. ¿Qué longitud debe tener cada uno de estos dos diámetros para que sea máxima el área delimitada por las tres circunferencias (región sombreada)? (Santiago, junio 2011)



Ejercicio 18.-
a) Define función derivable en un punto. Calcula si existen, los valores de a y b, para que sea derivable la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & si\ x < 0 \\ x^2 + ax + b & si\ x \geq 0 \end{cases}$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 19.-
a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Podemos asegurar que la gráfica de la función $f(x) = 3sen\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x^2)$ corta al eje de las X en algún punto del intervalo (0,π)? Razona la respuesta.
b) Descompón el número 40 en dos sumandos tales que el producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. ¿Cuánto vale ese producto? (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 20.- Calcula los valores de a, b, c, sabiendo que $y = ax^2 + bx + 1$ e $y = x^3 + c$, tienen la misma recta tangente en el punto (1,2). (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 21.-
a) Calcula los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$. Calcula también el máximo absoluto y el mínimo absoluto de esta función en el intervalo [-3,3]
b) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^2 + bxlnx$ tenga un punto de inflexión en el punto (1, 2). Para estes valores de a y b, calcula el dominio y los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 22.-

a) Enuncia el teorema de Bolzano. Probar que la función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo [1,2]. ¿Puede cortarlo en más de un punto?

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 23.-

a) Determina los valores de a para que la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Sea continua. ¿Es derivable en x = 1 para algún valor de a?

b) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial. (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 24.-

a) Calcula las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ (Santiago, septiembre 2012)

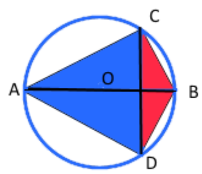
Ejercicio 25.-

a) Enuncia el teorema de Bolzano. ¿Tiene la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ alguna solución en el intervalo (0, 1)? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim_{x\to o}\frac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$ (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 26.- Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función f(x) = x^3- 4x^2 + 4x . (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 27.- En una circunferencia de centro O y radio 10 cm, se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima? (Santiago, junio 2013)



Ejercicio 28.- Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función f(x) = x^3 + ax – 1 en el intervalo [0,1]. Para este valor de a, calcula un punto c en (0,1), en el que la recta tangente a la gráfica de f(x) sea paralela al eje OX (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 29.-

a) Calcula el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimieno y los máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2}}$ (Santiago , septiembre 2013)

TEMA VI
CÁLCULO INTEGRAL

Definición.- Sea f(x) una función real de variable real. Se llama primitiva de f(x) a una función F(x), de modo que F'(x) = f(x)

Las primitivas de una misma función difieren en una constante
Si F(x) y G(x) son ambas primitivas de f(x), por definición F'(x) = G'(x) = f(x)
Por tanto F'(x) – G'(x) = 0 , (F-G)'(x) = 0, (F-G)(x) = k ; F(x) – G(x) = k.

Definición.- Al conjunto de primitivas de una función f(x) se le denomina integral indefinida de f(x) y se representa así:

$\int f(x)dx = F(x) + k$ siendo F(x) una primitiva de f(x)

Ejemplo: $\int 1dx = x + k$; $\int 2xdx = x^2 + k$; $\int e^x dx = e^x + k$; $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+k

Propiedades de la integral indefinida:

$$\int c.f(x)dx = c\int f(x)dx$$
$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Métodos de integración:

Inmediatas: Consiste en aplicar las reglas de derivación en sentido inverso.

Cambio de variable.- Pretende transformar una integral compleja en otra inmediata mediante un cambio de variable.

$\int 2x.sen(3x^2 + 4)dx$ hacemos el cambio t = $3x^2$+4 y derivamos ambos miembros: dt = 6x dx; de donde dx = dt/6x
Vamos a la integral original y sustituimos: $\int 2x.sent\frac{dt}{6x} = \int \frac{sent}{3}dt = \frac{1}{3}\int sent\ dt = \frac{-1}{3}cost$; finalmente se deshace el cambio de variable y queda el resultado final que sería: $\frac{-1}{3}\cos(3x^2 + 4) + k$

¿Cómo se puede saber cuándo una integral puede hacerse mediante un cambio de variable y que cambio de variable debe efectuarse?
La pregunta no tiene una respuesta global, pero en muchas ocasiones se detecta que funciona el cambio de variable cuando en la expresión a integrar figuran una función y su derivada multiplicando (salvo constantes). En este caso se debe llamar t a la función cuya derivada aparece multiplicando.
En el ejemplo anterior figuraba 2x multiplicando y la derivada de $3x^2$+4 es 6x. Como vemos se diferencias en las constantes.

Veamos otro ejemplo: $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Obsérvese que en la expresión aparece la función lnx y su derivada 1/x multiplicando. Por lo tanto, siguiendo el criterio anterior, hacemos t = lnx ; derivamos dt = 1/x dx , dx = x.dt

Sustituyendo en la integral:

$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{t}{x} x dt = \int t \ dt = \frac{t^2}{2}$, deshaciendo el cambio $\frac{\ln^2 x}{2} + k$

Método de integración por partes:

Cuando calculamos la integral de un producto y no se puede aplicar el criterio del cambio de variable, podemos intentar el método de integración por partes que consiste en lo siguiente:

$$\int f(x).g(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

Siendo u(x) = f(x) dv(x) = g(x)

La elección de u se hace siguiendo una regla mnemotécnica que viene dada por la expresión LIATE; L de logaritmo, I de inversa (funciones arco) , A de algebraica (funciones polinómicas), T de trigonométrica y E de exponencial. (en este orden)

Veamos un ejemplo:

$$\int x.lnx\ dx$$

u(x) = lnx ; dv(x) = x du (x) = 1/x v(x) = x^2/2

$$\int x.lnx\ dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{x^2}{4} + k$$

Es posible que el proceso por partes deba ser reiterado, por ejemplo:

$$\int x^2.senx\ dx$$

u(x) = x^2 dv(x) = sen x ; du(x) = 2x v(x) = -cosx

$\int x^2.senx\ dx = -x^2 cosx - \int -2xcosx\ dx$ Esta última integral también debe ser hecha por partes, por lo que hay que reiterar el proceso:

$$\int -2xcosx\ dx = -2xsenx - \int -2senx\ dx = -2xsenx - 2cosx + k$$

u(x) = -2x dv(x) = cosx du(x) = -2 v(x) = senx.

En consecuencia:

$\int x^2.senx\ dx = -x^2 cosx - \int -2xcosx\ dx = -x^2 cosx + 2xsenx + 2cosx + k$

Dentro de las integrales por partes, están unas particulares denominadas "que se muerden la cola", porque en el desarrollo de la integral se llega a obtener la integral de la misma expresión, por ejemplo:

$$\int e^x.senx\,dx = e^x.senx - \int e^x cosx\,dx = e^x.senx - [e^x cosx + \int e^x.senx\,dx] =$$
$$e^x(senx - cosx) - \int e^x.senx\,dx$$

Vemos que llegamos a la integral de partida. Basta pasarla al primer miembro y obtenemos:

$$2\int e^x.senx\,dx = e^x(senx - cosx)$$

De donde

$$\int e^x.senx\,dx = \frac{e^x(senx - cosx)}{2} + k$$

Método Escalante de integración por partes. (Curiosidad matemática)

Un método más heterodoxo[5], pero que también da un resultado exacto, es el siguiente:
Se establece una tabla con tres columnas, donde la primera de ellas está constituida por signos que se van alternando comenzando por +, en la segunda y tercera columnas se consignan las funciones f(x) y g(x) respectivamente. (la elección de f y g no es arbitraria, va a depender del tipo de función que sea cada una de ellas). En la segunda columna se van derivando las funciones de la fila inmediatamente superior y en la tercera se van obteniendo las primitivas de las funciones, sin constante de integración, de las funciones de la fila inmediatamente superior. El resultado final de la integral es el producto de las funciones obtenidas en la segunda columna de la fila 1 y la tercera columna de la fila 2 precedidas del signo de la primera columna de la fila 1, menos (signo - de la segunda fila) la integral del producto de las funciones obtenidas en la siguiente fila. Si esta última integral es inmediata o hay que resolverla por otro método que no sea por partes, el algoritmo finaliza, y se procede a su cálculo. Si por el contrario esta última integral debe seguir haciéndose por partes, el algoritmo continúa hasta finalizar como hemos dicho.
Veamos cuatro ejemplos para ilustrar el método:

$\int x.e^x dx$ $\int arctgx dx$ $\int senx.\cos x dx$ $\int x^2.\cos x dx$

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	x	e^x
–	1	e^x

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	arctgx	1
–	$\frac{1}{1+x^2}$	x

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	senx	cosx
–	cosx	senx

Signo	Deriva	Primitiva
	f(x)	g(x)
+	x^2	senx
–	2x	-cosx
+	2	-senx

[5] Este método se explica en la película “Lecciones inolvidables” basada en la vida del profesor mejicano Jaime Escalante que daba clases en centros marginales de Estados Unidos. Sus alumnos obtenían unos resultados excelentes en las pruebas de acceso de la Universidad. (La película se encuentra en la videoteca del Instituto)

Obsérvese que en la primera el resultado es x.e^x - $\int e^x dx$, finalizando el proceso pues la integral $\int e^x dx = e^x + k$ es inmediata.

En el segundo caso el resultado que se obtiene según el método de Escalante es $x.arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$ finalizando el proceso pues la integral que surge $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ es inmediata o se obtiene mediante un sencillo cambio de variable.

La tercera integral, $\int senx.\cos xdx = sen^2 x - \int senx.\cos xdx$, finaliza aquí pues es del tipo de las integrales cíclicas, obteniéndose que $2\int senx.\cos xdx = sen^2 x + k$, de donde $\int senx.\cos xdx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

Sin embargo, el cuarto caso necesita un paso más, pues, procediendo según este método tenemos: $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + \int 2x.\cos xdx$, pero obsérvese que $\int 2x.\cos xdx$, requiere ser resuelta también por el método de partes, pues no es inmediata, ni sirve cambio de variable alguno, por lo que el método continúa multiplicando en diagonal, es decir: $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + 2x.senx - \int 2senxdx$, donde se acaba el algoritmo pues. $\int 2senxdx$ es inmediata: -2cosx.

Así pues, el resultado final sería $\int x^2 senxdx = -x^2 \cos x + 2x.senx + 2\cos x + K$

Integrales de funciones racionales

A continuación integraremos funciones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo P y Q sendos polinomios de gramo m y n respectivamente.

Estudiemos los casos:

a) m < n

En este caso se descompone el denominador en factores mediante el cálculo de las raíces que pueden ser simples o múltiples.

En el caso de raíces simples se utiliza el método de los coeficientes indeterminados y el resultado de la integral van a ser sumas de logaritmos.

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}dx = Aln|x-2| + Bln|x-3| + k$

¿Cómo calcular A y B? $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$; A(x-3)+B(x-2) = x+3

Para x=3; 6 = B; Para x = 2; A = -5

La solución es: -5ln|x-2|+6ln|x-3| + k

Si en las raíces hubiese alguna múltiple, aparecerían logaritmos (para las simples) y potencias para las múltiples.

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{x+3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}dx = Aln|x-1| - \frac{B}{x-1} + k$

Para hallar A y B $\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$ x+3 = A(x-1) + B

Para x=1; B=4; para x= 0 3 = A + B; A = -1
La solución final es:

$$-ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + k$$

b) m ≥ n

En este caso se puede realizar la división de polinominos P(x):Q(x), obteniendo un cociente C(x) y un resto R(x), de modo que el grado del resto es menos que el del divisor, Q(x).

De la división se desprende que P(x) = C(x).Q(x) + R(x); dividiendo por Q(x), tengo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

En consecuencia

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

C(x) es un polinomio, cuya integral es inmediata, y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}$ es del tipo del apartado a)

Integral definida en un intervalo [a,b]

Definiciones

Dado un intervalo de R [a, b], se llama partición del intervalo [a, b] a un conjunto P formado por puntos x_o x_1 x_2 $x_3 \ldots x_n$, de forma que $a=x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Se llama norma de una partición al valor μ(P) = máx $\{|x_i - x_{i-1}| \ / \ i=1\ldots n\}$
Dadas dos particiones P y P' de un mismo intervalo [a,b], se dice que P es más fina que P' si P'⊂ P.

Definición. Dada una función continua en un intervalo [a, b] y sea P ={a, $x_1,\ldots,x_{n-1}$, b} una partición de dicho intervalo, se llama Suma Superior de Riemann de la función f en el intervalo [a,b] relativa a la partición P a:

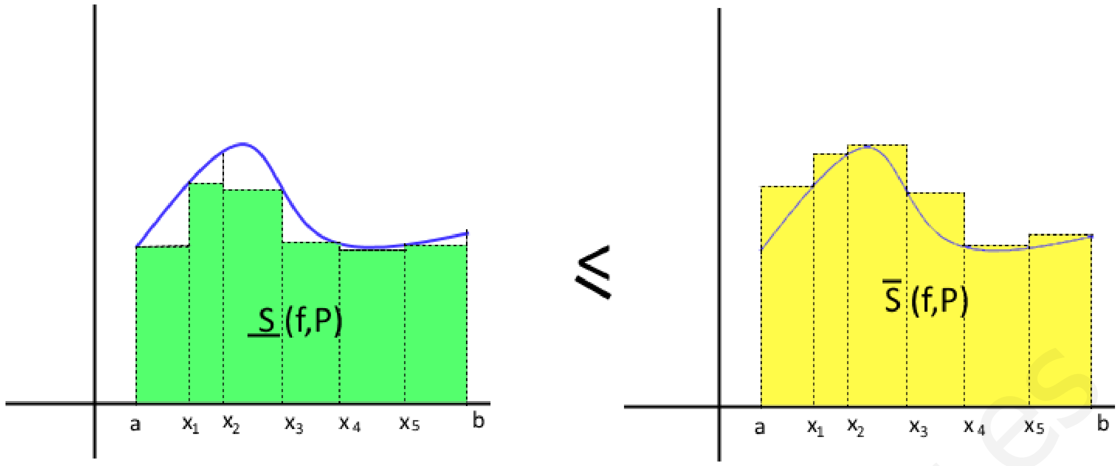
$$\bar{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i |x_i - x_{i-1}|$$

Siendo M_i = máx {f(x) / x∈ $[x_{i-1} \quad x_i]$ }

Del mismo modo definimos la Suma Inferior de Riemann de la función f en el intervalo [a, b] relativa a la partición P, a:

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i |x_i - x_{i-1}|$$

Siendo m_i = mín {f(x) / x∈ $[x_{i-1} \quad x_i]$ }

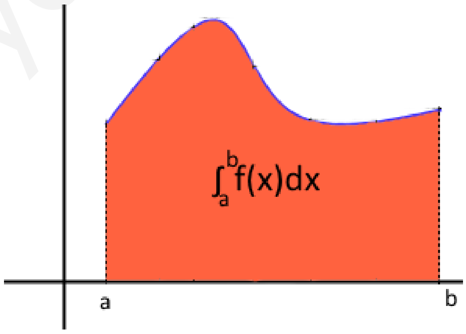


En esta gráfica hemos tomado la función f (color azul) y la partición de 7 elementos que figura en el eje OX.
Es evidente que se verifica que $\underline{S}(f,P) \leq \bar{S}(f,P)$ para cualquier partición dada P.

¿Pero qué ocurre si hacemos una partición más fina que P? Es obvio que la suma inferior aumenta y la suma superior disminuye.
¿Podemos a obtener una partición sumamente fina donde ambas lleguen a ser iguales? La respuesta es afirmativa y la condición es que la norma de esa partición tienda a 0.

Por tanto, cuando μ(P)→0 $\underline{S}(f,P) = \bar{S}(f,P)$ y a ese valor, que geométricamente es el área que encierra la función f(x) con las rectas x=a, x=b y el eje OX, la llamamos «integral definida de f en el intervalo [a,b]» y lo representaremos por:

$$\int_a^b f(x)dx$$



Propiedades de la integral definida

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

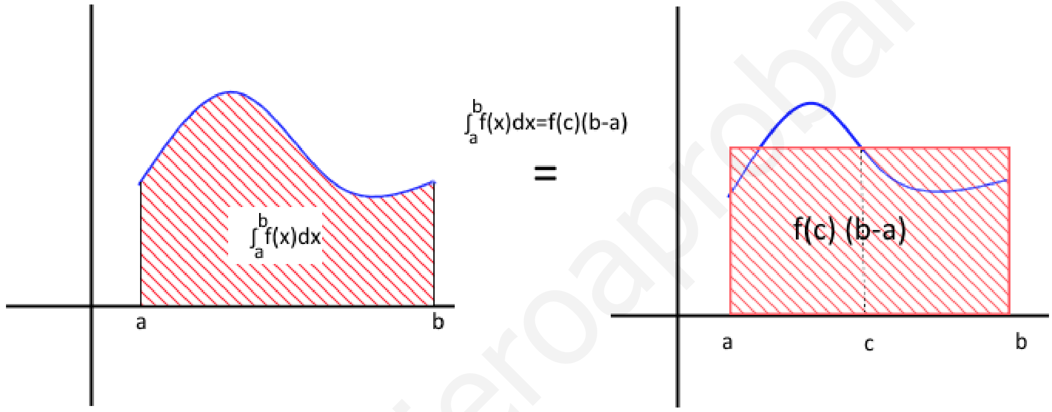
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Teorema del valor medio del cálculo integral:

Sea f continua en [a,b], existe un punto c$\in [a,b]$ / $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Su interpretación geométrica es la siguiente:

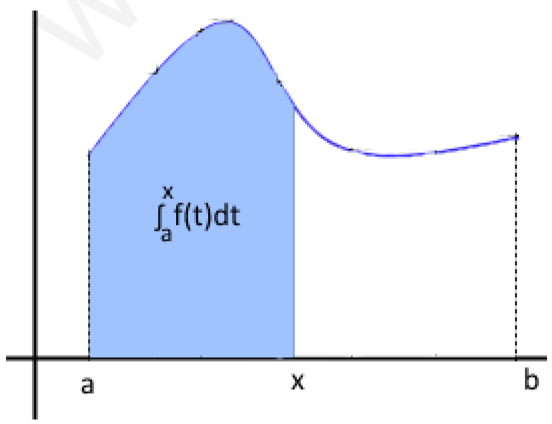


Podemos siempre encontrar un rectángulo de base b-a y altura f(c), cuya área coincide con la que limita la curva con el eje OX.

Función área:

Sea f una función continua en el intervalo [a, b] y definimos la siguiente función:

$F:[a,b] \quad \rightarrow \quad R$ de modo que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta función se llama función área y es continua en [a,b]



Según la definición

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es una función continua en [a, b] y F es la función área definida sobre f, entonces se verifica que: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ siendo F derivable en x.

Cálculo de la integral definida. Regla de Barrow

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ siendo F una primitiva de f

Ejemplo:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas

Sabiendo que si f(x) > 0 en todo x del intervalo [a, b] y continua
El area que encierra la gráfica de f, las rectas x=a y x=b con el eje OY, era precisamente $\int_a^b f(x)dx$ como ya hemos visto en la interpretación geométrica de la integral definida.
A partir de este hecho podemos averiguar cualquier área delimitada por un perímetro dado por funciones.

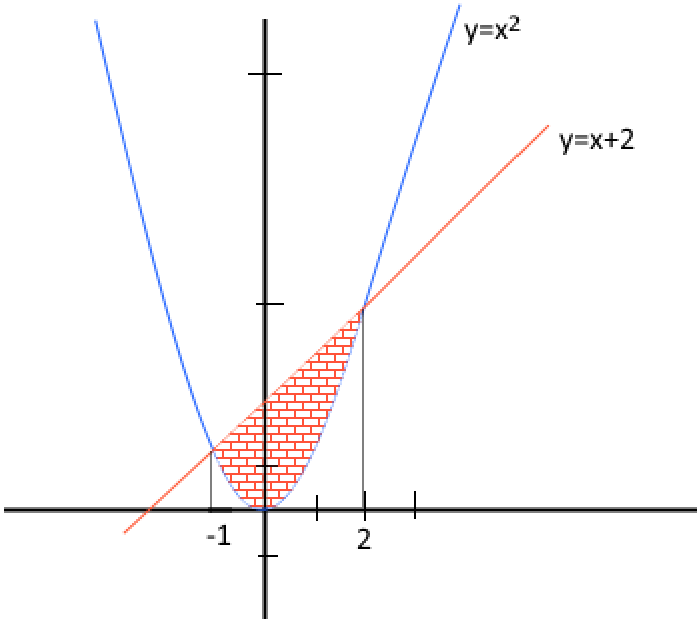
Si el área viene delimitada por dos funciones f y g (se cortan en dos puntos), el área va a ser
$\int_a^b f(x) - g(x)dx$ donde a y b son las abscisas de los puntos de corte y f(x) > g(x) $\forall x \in [a, b]$
(La integral de la función que limita por encima menos la que limita por debajo)

En caso de haber más de dos funciones, conviene realizar el dibujo de las mismas y descomponer en áreas delimitadas por dos funciones y aplicar el criterio anterior:

Ejemplos:

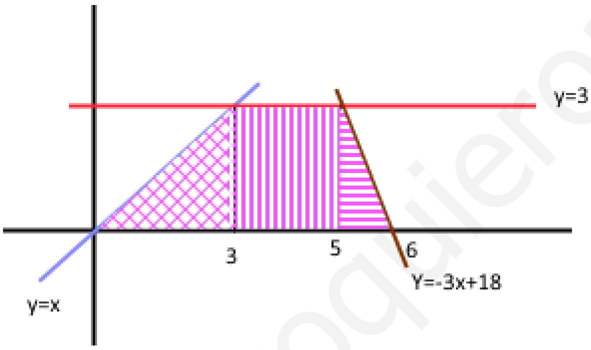
Calcular el área limitada por las funciones $y = x^2$ e $y = x + 2$
Estudiamos los puntos de corte de ambas funciones: $x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$
Se cortan en los puntos de abscisas -1 y 2.
Para saber cual está por encima entre -1 y 2, tomamos un punto intermedio 0 y lo sustituimos en ambas funciones. Donde nos dé el valor más alto determinará la función que está por encima: Así $0^2 = 0$ y $0+2 = 2$ Por tanto entre -1 y 2 la función $y = x+2$ está por encima de la función $y = x^2$
El área buscada será:

$$\int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{4}{3} + \frac{7}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5 \ u^2$$



Con más de una función:

Hallar el área limitada por las funciones y = x;   y = 3; y = -x+5   y el eje OX



Area buscada es:

$$\int_0^3 x\,dx + \int_3^5 3\,dx + \int_5^6 -3x + 18\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + [3x]_3^5 + [-3x^2 + 18x]_5^6 =$$

$$\frac{9}{2} + 15 - 9 + 5 = \frac{31}{2} = 15{,}5\ u^2$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1.Sabiendo que P(x) es un polinomio de tercer grado con un punto de inflexión en (1.0) y con P'''(1) = 24 donde, además, la tangente al polinomio en ese punto es horizontal, calcular $\int_{-1}^{0} P(x)dx$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCIÓN:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $P''(x) = 6ax + 2b$. $P'''(x) = 6a$
Sabemos que P(1) = 0 por ser (1,0) un punto de su gráfica. P'(1) = 0 por ser la tangente horizontal y por tanto la pendiente (derivada) nula. P''(1) = 0 por presentar un punto de inflexión y P'''(1) = 24. De esas tres igualdades, resultan las cuatro ecuaciones siguientes:
0 = a + b + c+ d ; 3a + 2b + c = 0 ; 6a + 2b = 0 y 6a = 24. De donde a = 4, b = -12, c = 12, d= -4. Una vez hallado el polinomio que es $4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$

$$\int_{-1}^{0}(4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)dx = [x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x]_{-1}^{0} = -15$$

2. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x-|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$, calcular $\int_{-1}^{0} x^2(gof)(x)dx$ (Santiago, junio 2001)

SOLUCIÓN:
Hay que ver cuando f(x) es positiva o no positiva: A la vista de f(x) es una función siempre positiva o nula puesto que $f(x) = \frac{x-|x|}{2} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ x & x \le 0 \end{cases}$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 3f(x) & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 3x & x \le 0 \end{cases}$$

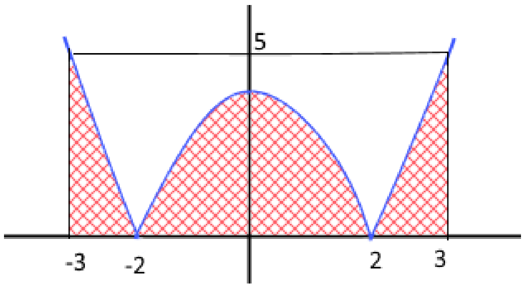
$$\int_{-1}^{0} x^2(gof)(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 3x dx = \int_{-1}^{0} 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = -3/4$$

3**. Sean f y g, dos funciones continuas definidas en el intervalo [a, b], que verifican que $\int_a^b f = \int_a^b g$ Demostrar que existen m, n ∈ $[a, b]$ tales que f(m) = g(n) (Santiago, septiembre 2001)**

SOLUCIÓN:

Aplicamos el teorema del valor medio a ambas funciones.
Existe m en [a,b] de modo que $\int_a^b f = \int_a^b f = f(m)(b-a)$
Existe n en [a,b] de modo que $\int_a^b g = g(n)(b-a)$
Por ser iguales, tenemos que $f(m)(b-a)$ = *g(n) (b-a) de donde f(m) = g(n)*

4- Dibuje la gráfica de f(x) = $|x^2$-4| en el intervalo [-3,3] y calcule su integral en ese intervalo.

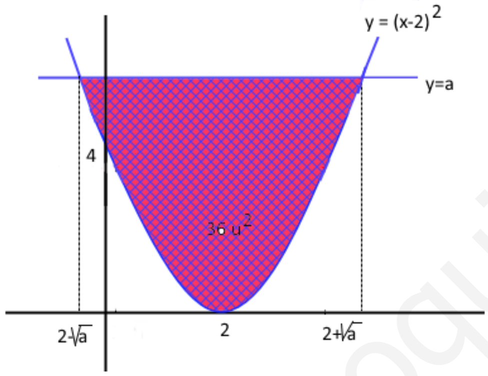


$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & si\ x \notin [-2,2] \\ -x^2+4 & si\ x \in [-2,2] \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{3} |x^2-4|dx = 2\int_{-3}^{0} |x^2-4|dx = 2\int_{.3}^{-2} x^2-4\,dx + 2\int_{-2}^{0} -x^2+4\,dx =$$

$$2\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-3}^{-2} + 2\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{0} = 2\left(\frac{-8}{3}+8+9-12\right)+2\left(\frac{-8}{3}+8\right) = \frac{46}{3}u^2$$

5. **Calcular el número positivo a, tal que el valor del area de la región limitada por la recta y = a y la parábola y = $(x-2)^2$ sea 36. (Santiago, septiembre 2002)**
SOLUCIÓN:



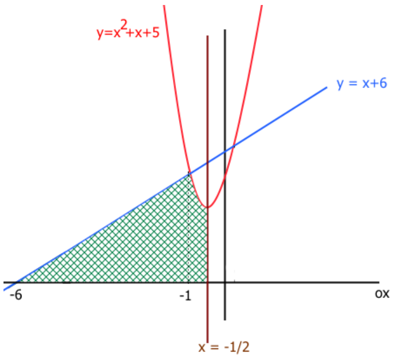
$$\int_{2-\sqrt{a}}^{2+\sqrt{a}} (a-(x-2)^2)dx = 36$$

$$\left[ax - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_{2-\sqrt{a}}^{2+\sqrt{a}} = 36$$

$$\left(2a + a\sqrt{a} - \frac{(2+\sqrt{a}-2)^3}{3}\right) - \left(2a - a\sqrt{a} - \frac{(2-\sqrt{a}-2)^3}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$\frac{4a\sqrt{a}}{3} = 36$; $4a\sqrt{a} = 108$; $a\sqrt{a} = 27$; $a^{\frac{3}{2}} = 27$; $a^3 = 27^2 = 3^6$; a = 9

6. **Determinar el área de la región limitada por la gráfica de la función *f(x)* = x^2 +*x*+5, el eje OX y las rectas *x* = -1/2 e y = *x*+6 (Santiago, septiembre 2003)**



Los puntos de corte de la reza y = x+6 con la parábola y = x^2 +*x*+5 se obtiene igualando $x^2+x+5= x+6;$ de donde x = -1, 1. Solo nos interesa el valor -1.
Y el punto de corte de y = x+6 con el eje OX se produce obviamente para x = -6.

Ya tenemos los límites de integración y determinada una función por encima y otra por debajo. Por tanto el área pedida es:

$$\int_{-6}^{-1}(x+6\,)dx + \int_{-1}^{-1/2}(x^2+x+5)dx = \left[\frac{(x+6)^2}{2}\right]_{-6}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{25}{2}-0\right) + \left(\frac{-1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}-5\right) = \frac{179}{12}u^2$$

7. Demostrar que la función f, dada por $f(x) = \frac{4}{x^2+x-2}$ es estrictamente positiva en (2, +∞) y hallar el área de la región determinada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 2 y x= 3. (Santiago

El dominio de la función f(x) es R –{-2, 1} y no se anula para ningún valor de x.
Por tanto, el signo de esa función es:

-3	-2	0	1	2
+		-		+

La función es positiva en (-∞, -2) U (1, +∞). En particular es positiva estrictamente en (2, +∞)

$\int_2^3 \frac{4}{x^2+x-2}dx$. Hacemos primero la integral indefinida:

$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$; A(x+2) + B(x-1) = 4
Para x = -2; -3B = 4 ; B = -4/3. Para x = 1; 3A = 4; A = 4/3.
La indefinida es $\frac{4}{3}Ln|x-1| - \frac{4}{3}Ln|x+2|$

El área pedida es $\left[\frac{4}{3}Ln|x-1| - \frac{4}{3}Ln|x+2|\right]_2^3 = \left(\frac{4}{3}Ln2 - \frac{4}{3}Ln5\right) - \left(\frac{4}{3}Ln1 - \frac{4}{3}Ln4 = \frac{4}{3}(Ln2 - ln5 + ln4) = \frac{4}{3}Ln\frac{8}{5}\right.$

8. Calcular $\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx$ (Santiago, junio 2005)

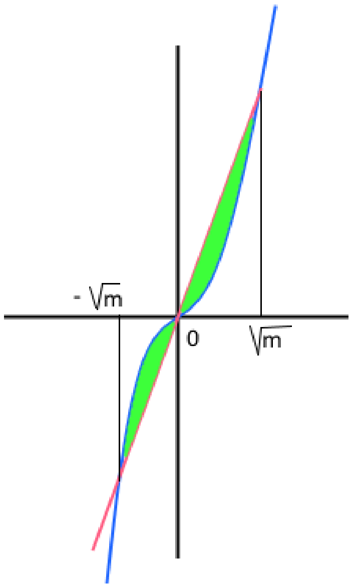
$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$
$$2x-1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

Para x = -1 ; -3 = -C de donde C = 3
Para x = 0 ; -1 = A
Para x =1 ; 1 = 4A + 2B + C; B =1

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = \text{-Ln }|x| + \text{Ln}|x+1| - \frac{3}{x+1} + k$$

9. Calcula el valor de m, para que el área del recinto limitado por la recta y = mx y la curva y = x^3, sea 2 unidades cuadradas. (Santiago, junio 2006)

Los puntos de corte son $x^3 = mx$ x(x^2-m) = 0, $-\sqrt{m}, 0, -\sqrt{m}$



Por simetría:

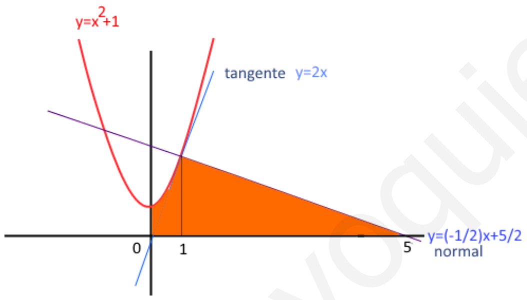
$$\int_{-\sqrt{m}}^{0} x^3 - mx\,dx = 1$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{mx^2}{2}\right]_{-\sqrt{m}}^{0} = 1$$

$$-\frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{2} = 1$$

$m^2 - 4 = 0$; m = 2. No vale la solución m =-2.

10. Halla el área determinada por y=x^2+1, su rectanormal en x=1 y los ejes.



$\int_0^1 x^2 + 1dx + \int_1^5 \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ dx =

$$\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{-x^2}{4} + \frac{5x}{2}\right]_1^5 = \frac{1}{3} + 1 + \left(\frac{-25}{4} + \frac{25}{2}\right) - \left(\frac{-1}{4} + \frac{5}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{3}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Ejercicio 1.- Enunciado del teorema fundamental del cálculo integral. Dada la función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$ ¿Tiene F(x) puntos de inflexión? Justifica la respuesta. (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 2.- Calcula el área de la región del plano limitada por el eje OX y la curva $y = x^3-9x$ (Santiago, junio 2007)

Ejercicio 3.- Dada la función $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le -\sqrt{2} \\ -x^2+2 & si\ x > -\sqrt{2} \end{cases}$. Calcula el área de la región del plano limitada por las gráficas de g(x) y h(x) = |x| (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 4. Enunciado del teorema fundamental del cálculo integral. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x) = \int_0^x [2+\cos(t^2)]dt,$ en el punto de abscisa x = 0. (Santiago, septiembre 2007)

Ejercicio 5.

a) Definición de primitiva de una función. Enunciado de la regla de Barrow.
b) Calcula $\int_0^1 e^x(2x-1)dx$ (Santiago, septiembre 2008)

Ejercicio 6. Calcula $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3}dx$ (Santiago , junio 2008)

Ejercicio 7.

a) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $g(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la recta $y = 2x$
b) Calcula $\int_0^{ln5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ (Santiago, junio 2009)

Ejercicio 8.

a) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX y la parábola $y = \frac{x^2}{4} - x$
b) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral. (Santiago, septiembre 2009)

Ejercicio 9.

a) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Sabiendo que $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$, con f una función continua en todos los puntos de la recta real, calcula f(2).
b) Calcula $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}dx$ (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 10. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la recta x+y = 7 y la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 5$. (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2010)

Ejercicio 11. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = -x^2+1$ y las rectas tangentes a esta parábola en los puntos de corte de la parábola con el eje OX (Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2010)

Ejercicio 12.

a) Calcula $\int xln(1+x^2)dx$
b) Enuncia e interpreta geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral.

Ejercicio 13. Dibuja el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$, su recta tangente en el punto (3,4) y el eje OX (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 14. Define integral indefinida de una función. Calcula $\int x^2 cosx\, dx$ (Santiago, junio 2011)

Ejercicio 15.- Enuncia la regla de Barrow. Calcula $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - lnx\right) dx$ (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 16.-

a) Define primitiva e integral indefinida de una función.
b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -3x^2 + 3$ y la recta y = -9. (Nota: para el dibujo de la gráfica de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2011)

Ejercicio 17.- Calcula $\int_2^3 \frac{5x^2-3x+1}{x^2-x} dx$ (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 18.- Calcula el área limitada por la parábola $y = 3x - x^2$ y su recta normal en el punto (3, 0). (Nota: para el dibujo de la gráfica de las gráficas, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, junio 2012)

Ejercicio 19.-

a) De una función derivable f(x) sabemos que pasa por el punto (0,1) y que su derivada es $f'(x) = xe^{2x}$. Calcula f(x) y la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto correspondiente a x=0.
b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 20.- Calcula $\int_1^0 \frac{(x-1)^2}{x^2+1} dx$ (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 21.- Dibuja u calcula el área de la región limitada por la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, la recta tangente en el punto donde la parábola tiene un extremo y la tangente a la parábola en el punto en el que la tangente es paralela a la recta y = 4x. (Nota: para el dibujo de la gráfica, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad) (Santiago, septiembre 2012)

Ejercicio 22.-

a) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad)

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2-x} dx$ (Santiago, junio 2013)

Ejercicio 23.- Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2 + 9x$, y las rectas y = 20; x-y+15 = 0. (Nota: para el dibujo de la gráfica de la parábola, indica los puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad)

Ejercicio 24.-

a) Define primitiva de una función y enuncia la regla de Barrow.

b) Calcula $\int_2^3 \frac{x^3+2}{x^2-1} dx$ (Santiago, septiembre 2013)