Prueba final A

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 42$, calcula razonadamente el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Discute el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$ y resuélvelo solamente para el caso $a = 1$.

3. Se considera la ecuación matricial $AX - 2X = B$, donde A y B son las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Resuélvela despejando convenientemente la matriz X y sustituyendo posteriormente los datos.

4. Dada la superficie esférica de centro $C(1, 2, 0)$ y tangente al plano π: $2x + y - 2z + 20 = 0$, se pide hallar:

a) La ecuación general de la superficie esférica.

b) Las coordenadas del punto de tangencia.

c) El área de la superficie esférica y el volumen de la esfera que delimita.

5. Los planos π_1: $x - y - z + 1 = 0$, π_2: $x - 3y - 5z + 3 = 0$ se cortan en una recta r. Determina:

a) La ecuación paramétrica de dicha recta.

b) El ángulo que forman dichos planos.

c) La ecuación de otro plano que pasa por $P(3, -5, 3)$ y corta perpendicularmente a los planos dados.

6. Dado el punto $P(-3, 1, 0)$ y la recta r: $(1 + 3t, -1 + t, -2)$, determina:

a) La ecuación del plano perpendicular a la recta y que pasa por P.

b) La distancia del punto a la recta.

c) Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de la recta r.

7. Halla los valores de a y de b para que la función $f(x) = \begin{cases} a + bx - x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2 + ax + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 4]$ y determina el valor o valores que verifican la tesis del teorema.

8. Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x - 1}{2 + x}$.

a) Estudia su monotonía y curvatura.

b) Representa gráficamente la función determinando además sus asíntotas.

9. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{5 + 3x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x + 4}{x^2 - 3x}\,dx$

10. Se considera el recinto acotado y limitado por la función $f(x) = e^{-x}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 1$.

a) Determina el área de dicho recinto.

b) Halla el volumen del cuerpo de revolución que se genera cuando el recinto anterior gira alrededor del eje de abscisas.

1. $\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 5 & 5 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -5\begin{vmatrix} x & z & y \\ 10-9 & 6-9 & 9-9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 42 = 210$

2. $|A| = 2(a+3)(a-1)$. Por tanto:

Si $a \neq -3$ y $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $a = -3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad (uniparamétrico). La solución se escribe $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -3\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $AX - 2X = B \Rightarrow (A - 2I)X = B \Rightarrow X = (A - 2I)^{-1}B$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad |A - 2I| = -1.$

Por tanto, resulta $(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -15 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -62 & -62 & -62 \\ -20 & -20 & -20 \\ -25 & -25 & -25 \end{pmatrix}$

4. a) Radio $r = d(C, \pi) = \dfrac{|2 + 2 + 20|}{\sqrt{4+1+4}} = 8$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 59$

b) $T = \pi \cap r$ donde $r(C, \vec{n}_\pi)$: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 2(-2\lambda) + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{8}{3} \Rightarrow T\left(\dfrac{19}{3}, \dfrac{14}{3}, -\dfrac{16}{3}\right)$

c) $A = 4\pi r^2 = 256\pi, \qquad V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2048}{3}\pi$

5. a) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = -3 \end{cases} \Rightarrow r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \dfrac{1 + 3 + 5}{\sqrt{3}\sqrt{35}} \Rightarrow \alpha = 28^\circ\, 33'\, 39''$

c) Los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, normales a π_1 y π_2 respectivamente, son directores del plano π:

$\pi = \begin{vmatrix} x-3 & y+5 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi\colon\ x + 2y - z = -10$

6. a) π: $3x + y + d = 0$. Como $P \in \pi \Rightarrow d = 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow \pi$: $3x + y + 8 = 0$.

b) $M = \pi \cap r \Rightarrow 3(1 + 3t) + (-1 + t) + 8 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = -1 \Rightarrow M(-2, -2, -2)$

La distancia pedida será:

$d(P, r) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$ u

c) M es el punto medio del segmento PP', donde $P'(x, y)$ es el simétrico de P buscado. Por tanto:

$-2 = \dfrac{x-3}{2} \Rightarrow x = -1;\ -2 = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow y = -5,$

$-2 = \dfrac{z}{2} \Rightarrow z = -4 \Rightarrow P'(-1, -5, -4)$

7. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow a + 2b - 4 = 2a + 12 \Rightarrow a = 2b - 16$

$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow b = a + 8 \Rightarrow a = 0$ y $b = 8$

La tesis del teorema dice que:

$\exists c \in (-1, 4)\ /\ \dfrac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = f'(c) \Rightarrow \dfrac{33}{5} = f'(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c < 2, \quad 8 - 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{7}{10} \\ c > 2, \quad 2c = \dfrac{33}{5} \Rightarrow c = \dfrac{33}{10} \end{cases}$

8. $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

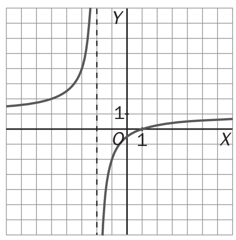
$f'(x) = \dfrac{3}{(2+x)^2} > 0;\ \ f''(x) = \dfrac{-6}{(2+x)^3} \neq 0,\ \forall x \in D.$

No tiene extremos relativos ni puntos de inflexión. Creciente en todo D.

Si $x \in (-\infty, -2)$ es cóncava hacia arriba y en $(-2, +\infty)$ es cóncava hacia abajo.

Asíntota vertical: $x = -2$.

Asíntota horizontal: $y = 1$.



9. a) $\displaystyle\int \frac{6x}{2\sqrt{5 + 3x^2}}\,dx = \sqrt{5 + 3x^2} + C$

b) $\dfrac{7}{3}\displaystyle\int \frac{dx}{x-3} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{7}{3}\ln|x - 3| - \frac{4}{3}\ln|x| + C$

10. a) $A = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$ u^2

b) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 (e^{-x})^2\,dx = \pi\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$ u^3