12 Representación de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular el dominio de una función dada por su expresión algebraica, su gráfica o mediante un enunciado, así como su continuidad.	**1.** Determina el dominio y la continuidad de las funciones: a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{-x-2}{x-3}}$ c) $k(x) = \ln(\text{sen}(2x))$
B. Calcular los puntos de corte con los ejes y el signo de una función.	**2.** Halla los puntos de corte con los ejes y el signo de las funciones: a) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$ c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x))$ b) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x}$ d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$
C. Estudiar las simetrías y la posible periodicidad de una función.	**3.** Determina la periodicidad de las funciones: a) $f(x) = \text{sen}^2 x$ b) $g(x) = 4\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$ **4.** Estudia las simetrías de las siguientes funciones: a) $f(x) = \ln\lvert x^2 - 5\rvert$ b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$
D. Calcular la tendencia de una función en el infinito y en las proximidades de puntos aislados en los que no está definida.	**5.** Estudia el comportamiento de las funciones en el infinito y en los puntos de discontinuidad. a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$ b) $g(x) = \ln\left\lvert\dfrac{x-5}{x+2}\right\rvert$
E. Calcular las asíntotas de una función.	**6.** Halla las asíntotas de las funciones: a) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x}$ b) $h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
F. Determinar la monotonía y extremos relativos de una función.	**7.** La función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$ tiene un mínimo relativo en el punto (2, 0). Determina los coeficientes b y c y estudia su monotonía.
G. Determinar la curvatura y los puntos de inflexión.	**8.** Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones: a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ b) $g(x) = \text{sen}\, x - \cos x$
H. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, tras hacer un estudio completo de sus características.	**9.** Efectúa la representación gráfica de las siguientes funciones tras realizar un estudio de las características más importantes de cada una de ellas. a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = \ln\lvert x^2 - 5\rvert$ e) $n(x) = 2\,\text{sen}\, x - \cos 2x$ b) $g(x) = \dfrac{3 + 2x^3}{1 - x^2}$ d) $m(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ f) $s(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$
I. Representar las gráficas de las funciones: $-f(x)$, $f(x) + k$, $f(x + c)$, $a \cdot f(x)$, $f(k \cdot x)$, $\lvert f(x)\rvert$, $f(\lvert x\rvert)$ cuando se conoce la gráfica de la función $f(x)$.	**10.** Teniendo en cuenta la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ representa las siguientes funciones en el mismo intervalo. a) $f(x) = 2\cos x$ c) $f(x) = 3 + \cos x$ e) $f(x) = 1 - \cos x$ b) $f(x) = \cos 2x$ d) $f(x) = \cos(x - \pi)$ f) $f(x) = \lvert 1 - 2\cos x\rvert$

1. a) $D(f) = \mathrm{R} - \{0, 3\}$

b) $D(g) = [-2, 3)$

c) $D(k) = \{x \in \mathrm{R} \ / \ \mathrm{sen}(2x) > 0\}$

$2x \in \{\text{I, II cuadrantes}\} \Rightarrow D = \left(0 + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

2. a) $f(x) = 1 + \mathrm{sen}\, x \begin{cases} Y\!: (0, 1) \\ X\!: \left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) \end{cases}$

f es siempre positiva excepto en los puntos de corte con el eje X.

b) $g(x) = \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} \begin{cases} Y\!: (0, 3) \\ X\!: \text{No tiene} \end{cases}$

$g(x) < 0$ si $x > \ln 2$; $g(x) > 0$ si $x < \ln 2$.

c) $h(x) = 1 - (\ln(3 + x)) \begin{cases} Y\!: (0, 1 - \ln 3) \\ X\!: (e - 3, 0) \end{cases}$

$h(x) < 0$ si $x > e - 3$; $h(x) > 0$ si $x < e - 3$.

d) $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$. No corta a ninguno.

$k(x) < 0$ si $x < 0$; $k(x) > 0$ si $x > 0$.

3. a) $f(x) = \mathrm{sen}^2\, x$. Período: $T = \pi$, porque $\mathrm{sen}^2(x + \pi) = \mathrm{sen}(x + \pi) \cdot \mathrm{sen}(x + \pi) =$
$= (-\mathrm{sen}\, x) \cdot (-\mathrm{sen}\, x) = \mathrm{sen}^2\, x$

b) $g(x) = 4\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$, $T = 2\pi : \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$

4. a) $f(x) = \ln|x^2 - 5|$. Es una función par: $f(-x) = f(x)$

b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $g(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -g(x)$.

Es una función impar.

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$. Es impar, ya que $h(-x) = -h(x)$.

5. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{5}$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \ln 1 = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = -\infty$

6. a) Vertical: $x = \ln 2$, porque $\lim\limits_{x \to \ln 2} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \infty$

Horizontales: $y = \pm 1$, porque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + e^x}{2 - e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{-x} + 1}{2e^{-x} - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

b) Oblicuas: $y = \pm x$, porque $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5}}{x} = 1$

$n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2 + 5} + x}\right) = 0$

7. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$; $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c = -12 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Creciente.

$f'(x) < 0 \ \forall x \in (0, 2)$. Decreciente.

En $x = 0$ hay un máximo relativo.

8. a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$

Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

Punto de inflexión para $x = 0$.

b) $g(x) = \mathrm{sen}\, x - \cos x$; $g''(x) = -\mathrm{sen}\, x + \cos x$

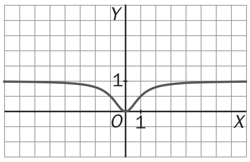
Período: $T = 2\pi$, se estudia $g(x)$ en $[0, 2\pi)$.

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{5\pi}{4}$, en los que hay inflexión.

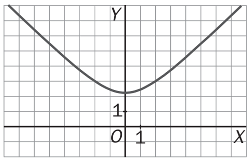
Cóncava hacia arriba en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 0\right]$.

Cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

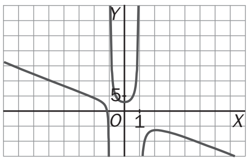
9. a)



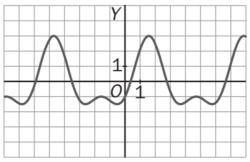
d)



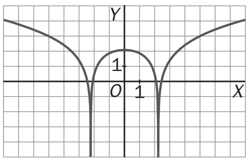
b)



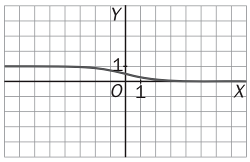
e)



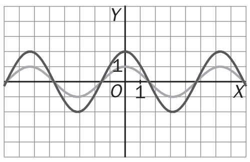
c)



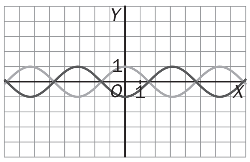
f)



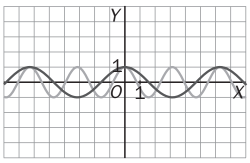
10. a)



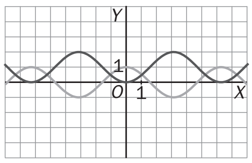
d)



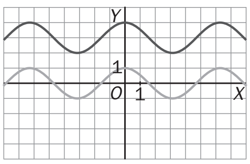
b)



e)



c)



f)