

11 Funciones derivables

Propuesta A

- La función $f(x) = \sqrt{\ln(\cos x)}$ existe para infinitos valores de x , pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?
- Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x^3 - 3x^2| + 5x - 3$ haciendo un estudio especial en los puntos $x = 0$ y $x = 3$.
- Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ que sea paralela a la recta de ecuación $3x - y + 1 = 0$. ¿Cuál es el punto de tangencia?
- Dada la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo $[1, 3]$.
- Calcula el valor de m , n y k , con $k < 0$, para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[k, 1]$ y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.
- Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 2]$ y halla el valor intermedio correspondiente.
- Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x}$	c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1}$	d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$
- De todos los sectores circulares de perímetro 4, determina la amplitud y el radio del que tiene área máxima.
- La producción de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura del mismo, según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2(32 - x)$ en donde x representa la temperatura en °C y $Q(x)$ la producción de hortalizas en kg. Se prevé que la temperatura no pueda bajar de 0 °C para evitar las heladas.
 - ¿Cuál deberá ser la temperatura óptima del invernadero para obtener la mayor cantidad de hortalizas?
 - ¿Qué cantidad de hortalizas se obtendrá en este último caso?
- Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:

a) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$	b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$
---------------------------------------	---------------------------------
- Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$	b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
-----------------------------	---------------------------------

Propuesta B

1. La función $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$ existe para infinitos valores de x , pero no es derivable en ninguno. ¿Por qué?
2. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} kx - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - 3x^2 + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea derivable en $x = 2$ y, si fuera posible, calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.
3. Desde el punto $P(1, 0)$ se trazan las tangentes a la curva de ecuación $y = x^2 + 2$. Determina los puntos de tangencia y las ecuaciones de dichas tangentes.
4. Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(-2, 7)$ y halla un punto en el segmento de parábola de extremos A y B en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por A y B .
5. Calcula el valor de a , b y k , con $k > 1$, para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + b(x-1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y determina el valor $x = c$ que verifica la tesis del teorema.
6. Demuestra que para cualquier número real p , la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ tiene una y solamente una solución real.
7. Calcula los límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \sin 2x}$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$
8. Dado un segmento $AC = a$, divídelo en dos partes AB y BC de modo que construyendo un cuadrado $ABED$ sobre AB y un triángulo equilátero BCF sobre BC la suma de sus áreas sea mínima.
9. Halla, utilizando métodos de optimización de funciones, la distancia del punto $P(2, 1, 6)$ a la recta de ecuación $r : \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -2 + k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$. Determina el punto de la recta más próximo al punto P .
10. Estudia la curvatura y determina los puntos de inflexión de las funciones:
 - a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$
 - b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
11. Determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía de las funciones:
 - a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$
 - b) $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$

Soluciones propuesta A

- El dominio $D(f) = \{x \in \mathbf{R}, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.
- La función es composición del valor absoluto y funciones polinómicas; por tanto, es continua en todo \mathbf{R} y derivable excepto, quizás, en $x = 0$ y en $x = 3$, valores que anulan el polinomio afectado por el valor absoluto.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 + 3x^2 + 5x}{x} = 5$$

En $x = 3$ se estudian las derivadas laterales.

$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^3 + 3x^2 + 5x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(5-x^2)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (5-x^2) = -4$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 15}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x^2+5)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2+5) = 14$$

Por tanto, f es derivable en $\mathbf{R} - \{3\}$.

- $m = f'(a) \Rightarrow 3 = 2a - 5 \Rightarrow a = 4$
 $f(a) = f(4) = 2$. El punto de tangencia es $(4, 2)$ y la recta tangente $y - 2 = 3(x - 4)$.
- La función $f(x)$ es continua y derivable porque es polinómica, por tanto, existe $c \in [1, 3]$ tal que $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 4}{2} = 16 = f'(c) = 6c + 4 \Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$

- La función debe ser continua en $[k, 1]$ y derivable en $(k, 1)$. Basta con estudiar en $x = 0$:
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 3 = n$
 $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 0 = m$

Además $f(k) = f(1) \Rightarrow 3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

El valor de c que verifica la tesis es $c = 0$, ya que $0 \in \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1\right)$ y $f'(0) = 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{a}{-2} = 1 + b$
 $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow \frac{-a}{4} = 2 \Rightarrow a = -8, b = 3$
 $\frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = \frac{7 - 2}{3} = \frac{5}{3} = f'(c)$.

Hay dos posibilidades: $\frac{5}{3} = \frac{8}{(c-3)^2} \Rightarrow c = 3 \pm \sqrt{\frac{24}{5}}$

Pero solo $c = 3 - \sqrt{\frac{24}{5}} \in (-1, 1)$

De la otra posibilidad, $\frac{5}{3} = 2c \Rightarrow c = \frac{5}{6} \notin (1, 2)$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 8x - 12}{2x - 6} = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{2x} - e^x - 1}{2e^{2x}} = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x}{2 \sin x \cos x} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2e^x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x(e^x - 1) + 2e^x e^x} = \frac{1}{2}$

- $S = \frac{r^2 \alpha}{2}$. Pero $2r + \alpha r = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{4 - 2r}{r}$
 $S = \frac{1}{2} r^2 \frac{4 - 2r}{r} = 2r - r^2 \Rightarrow S' = 2 - 2r$

El dominio de la función es $(0, 2)$ y la derivada se anula para $r = 1$ y $S''(1) < 0$, por lo que hay un máximo relativo para $r = 1$ y $\alpha = 2$.

- El dominio es $D(f) = [0, 32]$ ya que no puede haber una producción negativa. La derivada es $Q'(x) = 3(x + 1)(21 - x)$, que se anula para $x = 21 \in D(f)$. Como $Q(0) = 32$, $Q(21) = 5324$ y $Q(32) = 0$, la máxima producción es 5324 kg y se consigue a 21 °C.
- a) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-4 + 3x}{x^3}$$

	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
f''	-	+	
f	\cap	\cup	

Punto de inflexión: $\frac{4}{3}$

- $D(f) = \mathbf{R}$

$$f'(x) = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x}$$

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f''	+		+	
f	\cup	\cap	\cup	

Ptos. de inflexión: 1, 3

- a) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

	0	e	$+\infty$
f'	+	-	
f	crece	decrece	

Máximo relativo: e

- $D(f) = \mathbf{R}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	+	
f	decrece	crece	

Mínimo relativo: 1

Soluciones propuesta B

1. El dominio, $D(f) = \{x \in \mathbf{R}, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, está formado por puntos aislados. Por tanto, la función no es continua ni, por ende, derivable, en ningún punto.

2. Para que sea derivable ha de ser continua.
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2k - 4 = 2 \Rightarrow k = 3$

Para $k = 3$, $f'(2^-) = -1$ y $f'(2^+) = 0$, f no es derivable en $x = 2 \Rightarrow$ no tiene tangente.

3. Las tangentes en el punto $A(a, f(a))$ tienen una pendiente $m = f'(a) = 2a$, luego su ecuación es $y = 2a(x - 1)$ ya que pasa por el punto $(1, 0)$. La intersección de la tangente con la curva tiene que ser un único punto.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ y = 2a(x - 1) \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2ax + 2(a + 1) = 0. \text{ Como}$$

la solución es doble, el discriminante es cero: $4a^2 - 8(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$

Para $a = 1 + \sqrt{3}$, el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1 + \sqrt{3}, 6 + 2\sqrt{3})$ e $y = (2 + 2\sqrt{3})(x - 1)$.

Para $a = 1 - \sqrt{3}$ el punto de tangencia y la recta tangente son, respectivamente, $A(1 - \sqrt{3}, 6 - 2\sqrt{3})$ e $y = (2 - 2\sqrt{3})(x - 1)$.

4. La ecuación será $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 4a - 2b + c = 7 \end{cases}$$

se obtiene $f(x) = x^2 - x + 1$.

$$\frac{3-1}{2-0} = f'(c) \Rightarrow 1 = 2c - 1 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2)$$

5. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5$$

$$f(-2) = f(k) \Rightarrow -6 = -k^2 + 5(k - 1) + 4 \Rightarrow k = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -2c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in \left(-2, \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

6. Si se considera la función $f(x) = 2x^5 + x + p$ cuya derivada, $f'(x) = 10x^4 + 1 > 0 \forall x$, indica que es monótona creciente. Como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + x + p) = -\infty$$

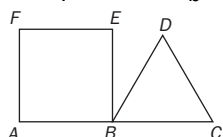
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 + x + p) = +\infty$, la función corta solo una vez al eje de abscisas.

7. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{3x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 8x + 4}{6x + 6} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x - 1}{1 - 2 \cos 2x} = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}$

8. Llamando $x = BC$, $AB = a - x$
 Lado del cuadrado: $l = a - x$

 Área total = Área triángulo + Área cuadrado:
 $S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + (a - x)^2$, con $D = (0, a)$
 $S' = \frac{\sqrt{3}}{2} x - 2(a - x) = 0 \Rightarrow x_a = \frac{4a}{4 + \sqrt{3}}$. Como

$$S(0) = a^2 > S(a) = \frac{\sqrt{3} a^2}{4} > S(x_a) = \frac{4\sqrt{3} + 9}{(4 + \sqrt{3})^2} a^2$$

$$\text{Área mínima: } AB = \frac{\sqrt{3}a}{4 + \sqrt{3}}, BC = \frac{4a}{4 + \sqrt{3}}$$

9. Punto genérico de r : $A(1 - 2k, -2 + k, 2 + 2k)$. Hay que minimizar

$$d(k) = |PA| = \sqrt{(-1 - 2k)^2 + (-3 + k)^2 + (-4 + 2k)^2}$$

$$d'(k) = \frac{9(k - 1)}{\sqrt{9k^2 - 18k + 26}} = 0 \Rightarrow k = 1, \text{ que da}$$

el mínimo de $d(k)$: $d(P, r) = \sqrt{17}$ y $A(-1, -1, 4)$.

10. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^2}}$

$$f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2 - 2x + 5)^3}} > 0 \forall x \in \mathbf{R}$$

f no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba (\cup) en todo \mathbf{R} .

b) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

	$-\infty$	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
f''	-	+	
f	\cap	\cup	

Inflexión: $\sqrt{e^3}$

11. a) $D(f) = \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{-(x - 1)^2}{e^x} \leq 0 \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ siempre decrece y no tiene extremos relativos.

b) $D(f) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	crece	decrece	crece	

Máximo relativo: 1
Mínimo relativo: 2