1 EL ESPACIO EUCLÍDEO TRIDIMENSIONAL

En los dos anteriores temas, se han estudiado problemas que se referían a incidencia, intersección y paralelismo de puntos, rectas o planos, pero no problemas métricos que traten de mediciones: longitudes, áreas, ángulos, etc.

Se considera el espacio vectorial V_3 de los vectores del espacio. Supongamos que en el espacio V_3 introducimos el producto escalar entre dos vectores.

Como las bases del espacio vectorial están formadas por tres vectores libres no coplanarios, tomamos una base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ que cumpla las siguientes condiciones:

a) El módulo de cada uno de ellos es la unidad: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$

b) Cada dos vectores son perpendiculares entre sí $\vec{u} \perp \vec{v} \perp \vec{w}$

En tal caso, se dice que $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es una ***base ortonormal*** del espacio.

Si las coordenadas de los vectores están referidas a una misma base ortonormal, el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de sus respectivas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)\\ \vec{b} = (b_1,b_2,b_3)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

Al espacio V_3 dotado de un producto escalar se denominado ***espacio euclídeo***.

Para estudiar los problemas métricos, emplearemos un sistema de referencia $\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, donde O es un punto tomado como origen del sistema y $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base ortonormal del espacio.

Aplicaciones del producto escalar:

1. *Módulo o norma de un vector. Vector unitario*

- Si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$
- El vector unitario que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ es $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

2. *Ángulo de dos vectores*

Si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \rightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$

3. Vectores ortogonales.

Si $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 = 0$

4. Vector normal al plano

Sea el plano π: $Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow$ Vector normal: $\vec{n} = (A,B,C)$ perpendicular al plano

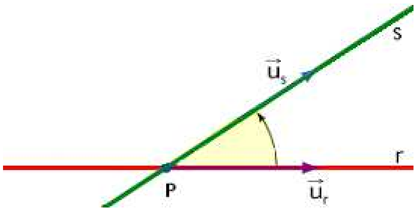
2 ÁNGULOS

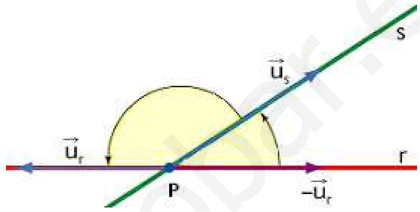
2.1. Ángulos entre dos rectas

Definición:

- Se define el **ángulo entre dos rectas** que se cortan r y s como el menor de los ángulos que forman sus respectivos vectores de dirección.
- En el caso de dos rectas que se cruzan, se define el ángulo de las dos rectas como el formado por dos paralelas a ambas que se corten.

Dadas las rectas r y s, cuyos vectores de dirección son $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ respectivamente, el ángulo que forman ambas rectas es el mismo ángulo o el suplementario del ángulo que forman sus vectores de dirección.





Como cos a = - cos (180 – a) $\rightarrow \cos(\widehat{r,s}) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|$

Por tanto, la expresión analítica del ángulo entre dos rectas es:

$$\cos(\widehat{r,s}) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}_s}\right)\right| = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}$$

Condición de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas.

Sean r: $P + <\vec{u}>$ s: $Q + <\vec{v}>$ siendo $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$

a) $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 = 0$

b) $r \parallel s \Leftrightarrow \vec{u} = k\cdot\vec{v}\,;k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$

Ejemplo:

Calcular el ángulo que forman las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

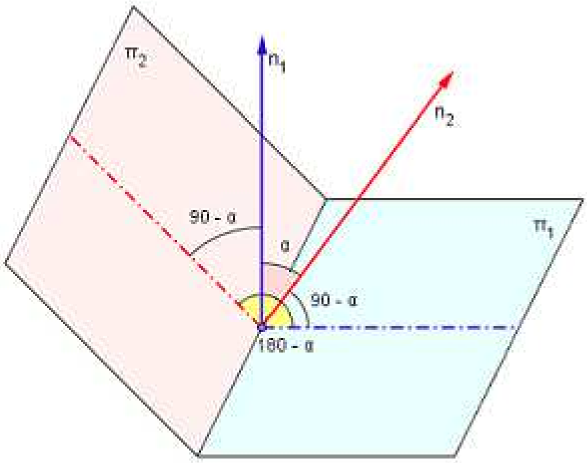
- Vector director de r: (2, -1,3) x (1, 2, 0) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6,3,5) \rightarrow |\vec{u}_r| = \sqrt{36+9+25} = \sqrt{70}$
- Vector director de s: (1,1,1) x (3, 2, -1) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3,4,-1) \rightarrow |\vec{u}_s| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$$\cos(\widehat{r,s}) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|} = \frac{18+12-5}{\sqrt{70}\cdot\sqrt{26}} = \frac{25}{\sqrt{1820}} \simeq 0{,}586 \rightarrow (\widehat{r,s}) = 54^{o}\ 7'\ 32''$$

2.2. Ángulos entre dos planos

Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



Sean $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ los vectores normales a los planos π_1 y π_2, respectivamente.

El ángulo de dos planos secantes es el menor de los ángulos que forman sus vectores normales:

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2}) = \left|\cos\left(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}\right)\right| = \frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos planos:

Sean dos planos del espacio:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

a) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \iff \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$

b) $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \iff \vec{n_1} = k\cdot\vec{n_2}\ ; k\in\mathbb{R} \iff \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Haz de planos paralelos a uno dado

Sea $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ un plano.

El haz de planos paralelos a π es: $\pi_k: Ax + By + Cz + k = 0\ ,\forall k\in\mathbb{R}$

Ejemplo:

1. a) Calcular el ángulo que forman los planos:

$$\pi_1: 3x + 2y - 4z + 7 = 0 \quad ; \quad \pi_2: 5y - 2z + 9 = 0$$

b) Determinar la ecuación del plano paralelo a π_1 que pase por el punto P(2,0, -1)

a) Sea $\vec{n_1}$ (3, 2, -4) vector normal de π_1

$\vec{n_2}$ (0, 5, -2) vector normal de π_2

Aplicamos la fórmula:

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2}) = \cos\left(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}\right) = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{10+8}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{25+4}} = \frac{18}{29} \simeq 0{,}6206$$

Por tanto, $(\widehat{\pi_1,\pi_2}) \simeq 51^{o}38'$

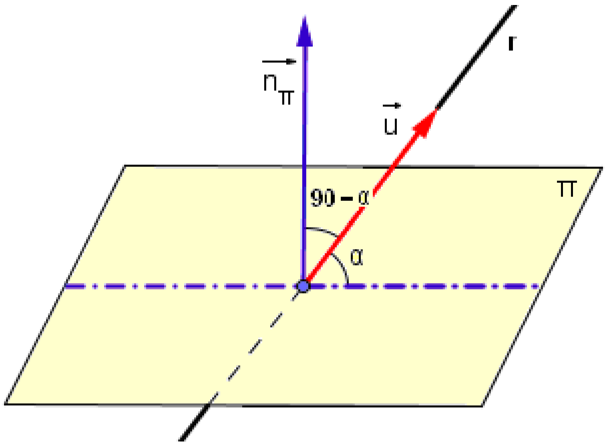
b) Cualquier plano paralelo a π_1 es de la forma 3x + 2y – 4z + k = 0

Pasa por P(2,0, -1) $\rightarrow$ 6 + 4 + k = 0 $\rightarrow$ k = -10

Luego el plano buscado es 3x + 2y – 4z – 10 = 0

2.3. Ángulos entre recta y plano

Sean la recta r, de dirección $\vec{u}_r=(u_1,u_2,u_3)$, y el plano π de vector normal $\vec{n}_\pi(A,B,C)$.



Según el dibujo, el ángulo que determinan el plano y la recta es el ángulo complementario del que forman los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$.

El **ángulo de una recta *r* y un plano π** es igual al ángulo que forma la recta *r* con la proyección ortogonal de *r* sobre π.

El ángulo de dos planos secantes

El ángulo α queda determinado si se conoce su seno.

$$\operatorname{sen}(\widehat{r,\pi})=\left|\cos\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{n}_\pi}\right)\right|=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano:

Sean la recta r, de dirección $\vec{u}_r=(u_1,u_2,u_3)$, y el plano π de vector normal $\vec{n}_\pi(A,B,C)$.

a) $\pi\perp r \iff \vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r \iff \vec{u}_r=k\cdot\vec{n}_\pi\ ;k\in\mathbb{R} \iff \dfrac{u_1}{A}=\dfrac{u_2}{B}=\dfrac{u_3}{C}$

b) $\pi\parallel r \iff \vec{n}_\pi\perp\vec{u}_r \iff \vec{n}_\pi\cdot\vec{u}_\pi=0 \iff Au_1+Bu_2+Cu_3=0$

Ejemplos:

1. Calcular el ángulo que forman el plano y la recta:

$$\pi: x+y-2z=0 \quad ; \quad r:\begin{cases}2x+z=7\\ x-y=2\end{cases}$$

Determinamos el vector de dirección de r:

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=(1,1,-2)\to\vec{n}_\pi\parallel\vec{u}_r\iff\pi\perp r$$

$$\cos(90-\alpha)=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{n}_\pi|}=\frac{1+1+4}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=1\to 90^o-\alpha=0^o\to(\widehat{r,\pi})=90^o$$

2. Determinar el plano π que pasa por el punto P(1, 0, -1), es paralelo a la recta r: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$ y es perpendicular al plano $\pi_1: x+y-z+2=0$

Vector normal al plano π_1: $\vec{n}_1$ (1, 1, -2)

Vector de dirección de r: $\vec{u}_r$ (2, -1, 3)

El plano π viene determinado por P y los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{u}_r$:

$$\begin{vmatrix}x-1&y&z+1\\1&1&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}=0\to 2(x-1)-5y-3(z+1)=0\to\pi: 2x-5y-3z-5=0$$

3 DISTANCIA

3.1. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre los puntos A(1,-2, 0) y B(2, -1, 3)

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,3)\longrightarrow d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2+3^2}=\sqrt{11}$$

3.2. Distancia de un punto a una recta

<u>1ª FORMA:</u>

Dado un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y una recta r determinada por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector de dirección $\vec{u}_r(u_1,u_2,u_3)$.

La **distancia del punto P a la recta r** es la distancia entre los puntos P y Q, siendo Q la proyección de P sobre la recta r.

Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r, para ello realizamos los siguientes pasos:

a) Determinar la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto:

Como $r\perp\pi \longrightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi$, siendo $\vec{n}_\pi$ vector normal al plano: $\vec{n}_\pi=(u_1,u_2,u_3)$

b) Calcular el punto de intersección de la recta r y el plano π : Q

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre del punto P(1,-2, 3) a la recta r: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$

Sea $\vec{u}_r$ (2, 1, -1) vector de dirección.

a) Determinamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto P:

$\vec{n}_\pi=\vec{u}_r=(2,1,-1)\rightarrow \pi: 2(x-1)+y+2-(z-3)=0 \rightarrow \pi\equiv 2x+y-z+3=0$

b) Determinamos el punto de corte de la recta y el plano:

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π:

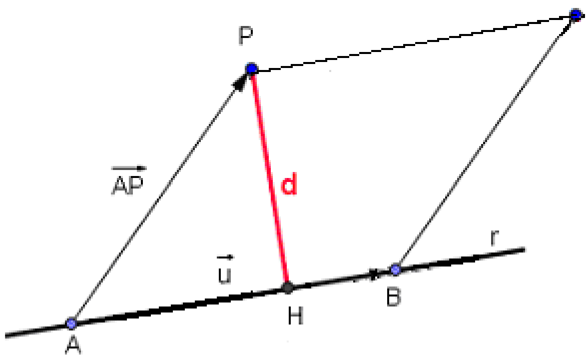
$$2(1+2\lambda)+(-2+\lambda)+\lambda+3=0\ \rightarrow 6\lambda+3=0\ \rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\ \rightarrow \text{ Sustituyendo en r: } Q=\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$$

c) $d(P,r)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

2ª FORMA:

.

Dado un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y una recta r determinada por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector de dirección $\vec{u}_r(u_1,u_2,u_3)$.



Consideramos el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{u}$.

Área = $|\vec{u}| \cdot d$

Pero, también es: A = $|\vec{AP} \times \vec{u}|$

Igualando las dos áreas, se obtiene:

$$|\vec{AP} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot d \rightarrow \boxed{d = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}}$$

La distancia del punto a la recta es independiente del punto de la recta que se tome y del vector de dirección

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre del punto P(1,-2, 3) a la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$

Sea A(1,-2,0) un punto de r y $\vec{u}_r$ (2, 1, -1) vector de dirección.

$$\vec{AP} = (0,0,3) \rightarrow \vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,6,0) \rightarrow |\vec{AP} \times \vec{u}| = \sqrt{(-3)^2+6^2} = \sqrt{45}$$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

3.3. Distancia de un punto a un plano

1ª FORMA:

Sea el plano π de ecuación Ax + By + Cz + D = 0 y P un punto de coordenadas $P(x_1,y_1,z_1)$

La **distancia del punto P al plano π** es la distancia entre los puntos P y Q, siendo Q la proyección de P sobre el plano.

Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π, para ello realizamos los siguientes pasos:

a) Determinar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto:

Como $r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi$, siendo $\vec{n}_\pi$ vector normal al plano: $\vec{u}_r = (A,B,C)$

b) Calcular el punto de intersección de la recta r y el plano π: Q

Ejemplo:

1. Hallar la distancia del punto P(3, 1, -2) al plano $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$.

Sea $\vec{n}_\pi(2,1,-1)$ vector normal del plano.

a) Determinamos la recta r perpendicular al plano que pasa por P:

$$\text{Como } r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{u}_r = (2,1,-1) \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases}$$

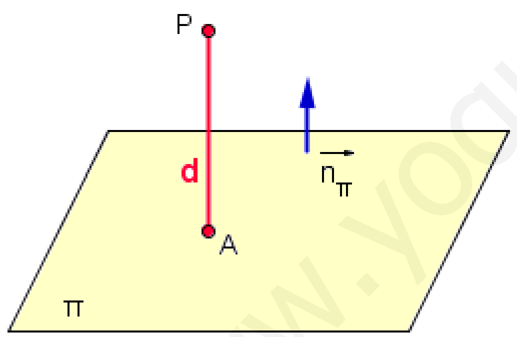
b) Calculamos el punto de intersección de la recta y el plano. Para ello sustituimos las ecuaciones de r en la implícita del plano:

$$2(3+2\lambda)+1+\lambda-(-2-\lambda)+1=0 \rightarrow 6\lambda+10=0 \rightarrow \lambda=-\frac{5}{3}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de r, obtenemos las coordenadas del punto Q: $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

c) $d(P,\pi) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)\right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

<u>2ª FORMA</u>:



Sea $A(x_2,y_2,z_2)$ el punto proyección de P sobre el plano.

Sea $\vec{n}_\pi(A,B,C)$ el vector normal al plano.

$$d(P,\pi) = d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \frac{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|}$$

Como $\vec{n}_\pi \parallel \overrightarrow{AP}$, se verifica que:

$$|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi| = |\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{n}_\pi|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\vec{n}_\pi}\right) = |\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{n}_\pi|$$

Por tanto: $d(P,\pi) = d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = \dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|}$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)\cdot(A,B,C) = Ax_1+By_1+Cz_1\underbrace{-Ax_2-By_2-Cz_2}_{D}$$

$$A \in \pi \rightarrow Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 \rightarrow D=-Ax_2-By_2-Cz_2$$

Luego, queda: $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi = = Ax_1+By_1+Cz_1+D$

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|}$$

Ejemplo:

1. Hallar la distancia del punto P(3, 1, -2) a los planos $\pi_1: 2x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2: 2y - 3 = 0$

- $$d(P,\pi_1) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}|}{|\overrightarrow{n_\pi}|} = \left|\frac{2\cdot3+1\cdot1-(-2)+1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$
- $$d(P,\pi_2) = \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}|}{|\overrightarrow{n_\pi}|} = \left|\frac{2\cdot1-3}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}\right| = \frac{1}{2}$$

2. Hallar la ecuación de un plano π paralelo al plano $\pi': 2x - 2y + z + 6 = 0$ y que diste 5 unidades del origen.

Al ser paralelo a π', su ecuación es de la forma: $2x - 2y + z + k = 0$

Para determinar k imponemos que la distancia al origen sea 5:

$$d(O,\pi) = \left|\frac{k}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}\right| = \left|\frac{k}{3}\right| = 5 \rightarrow |k| = 15 \rightarrow k = \pm 15$$

Hay dos planos: $\pi_1: 2x - 2y + z - 15 = 0$; $\pi_2: 2x - 2y + z + 15 = 0$

3.4. Distancia entre dos planos.

Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

a) Si son secantes $\rightarrow d(\pi_1, \pi_2) = 0$

b) Si son paralelas $\rightarrow$ La distancia es la distancia de un punto cualquiera de uno de los planos al otro.

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre los planos:

$$\pi_1: 2x + y - 2z + 1 = 0 \qquad \pi_2: 4x + 2y - 4z + 3 = 0$$

Ambos planos son paralelos ya que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{1}{3}$

Tomamos un punto del plano π_1: P(0,-1,0)

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = \frac{|-2+3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

3.5. Distancia entre recta y plano.

Dada una recta r y un plano π

a) Si son secantes o la recta está contenida en el plano $\rightarrow$ d(r, π) = 0

b) Si son paralelos $\rightarrow$ la distancia es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre la recta y el plano:

$$\pi: 2x-3y+z+15=0 \qquad r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}$$

Sea el vector normal del plano, $\vec{n}$ (2,-3,1), y el vector de dirección de la recta, $\vec{u}$ (2,1,-1)

La recta y el plano son paralelos:

a) $\vec{n} \perp \vec{u}$ ya que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 4-3-1=0$.

b) Además, el punto de la recta P(1, 0, -3) $\notin \pi$

Por tanto, la distancia es:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|2-3+15|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

3.6. Distancia entre dos rectas.

Sean r y s dos rectas: r = P + < $\vec{u}$ > , s = Q + < $\vec{v}$ >

a) Si son secantes $\rightarrow$ d(r, s) = 0

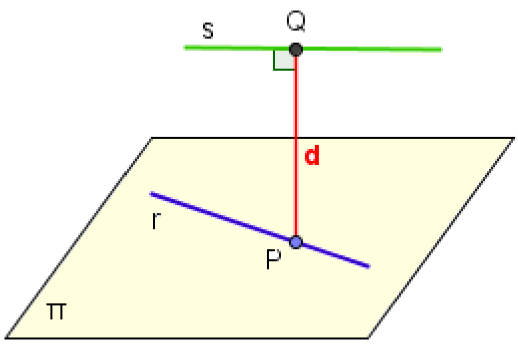
b) Si son paralelas $\rightarrow$ La distancia es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra.

$$d(r,s) = d(Q, r) = d(P, s)$$

c) Si se cruzan $\rightarrow$ La distancia es la distancia de cualquier punto Q de s al plano paralelo a la recta s que contiene a r, es decir, al plano determinado por el punto P de r y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1ª FORMA:

Para determinar la distancia procedemos de la siguiente forma:



1) Determinamos el plano π que contiene a una de las rectas, r, y es paralelo a la otra, s:

$$\pi = P + <\vec{u}> + <\vec{v}>$$

2) La distancia entre ambas rectas es la distancia de un punto de la recta s paralela al plano

$$d(r, s) = d(Q, \pi), \; Q \in s$$

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre las rectas:

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2} \qquad s: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$$

Sea $\vec{u}_r$ (2, 3, 2) vector director de r y P(-1, 1, 0) un punto de r.

Sea $\vec{v}_s$ (2, 1, -1) vector director de s y Q(1, 0,-2) un punto de s.

Estudiamos la posición relativa de las dos rectas estudiando la dependencia de los vectores $\{\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{PQ}\}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \{\vec{u}_r,\ \vec{v}_s,\ \overrightarrow{PQ}\} \text{ son L.I.} \rightarrow \text{r y s se cruzan}$$

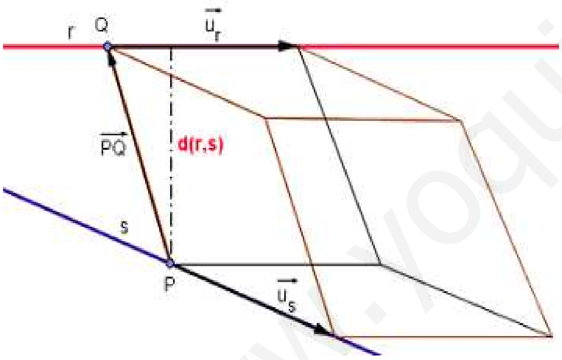
Calculamos el plano que contiene a r y es paralelo a s:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5(x+1) - 6(y-1) + 4z = 0 \rightarrow \pi: 5x - 6y + 4z + 11 = 0$$

Calculamos la distancia del punto Q(1, 0, -2) al plano π.

$$d(Q, \pi) = \frac{5-8+11}{\sqrt{5^2+6^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{77}}$$

2ª FORMA:



La distancia entre las rectas coincide con la altura del paralelepípedo.

Volumen = Área base x Altura

$$\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right| = \left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right| \cdot d(r,s)$$

Por tanto:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right|}$$

Ejemplo:

1. Calcular la distancia entre estas dos rectas del ejemplo anterior

Sea $\vec{u}_r$ (2, 3, 2) vector director de r y P(-1, 1, 0) un punto de r.

Sea $\vec{v}_s$ (2, 1, -1) vector director de s y Q(1, 0,-2) un punto de s.

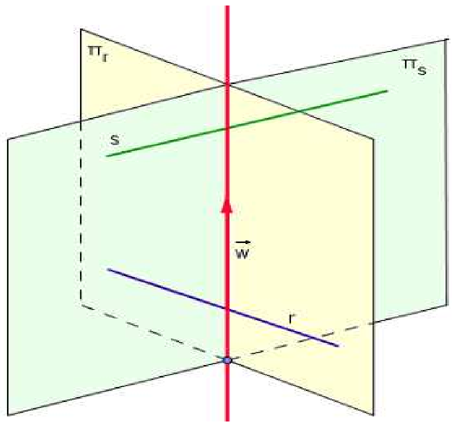
$$\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{matrix}\right\| = |-8| = 8 \quad ; \quad \left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = |(-5,6,-4)| = \sqrt{25+36+16} = \sqrt{77}$$

$$\text{Luego } d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\right|} = \frac{8}{\sqrt{77}}$$

4 PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS

La **perpendicular común** a dos rectas no paralelas es la recta que corta ortogonalmente a cada una de ellas.

1ª FORMA:



Los pasos a seguir son:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Calcular $\vec{w}$ vector perpendicular a los vectores de dirección de r y s.

c) Determinar el plano que contiene a r y a $\vec{w}$

d) Determinar el plano que contiene a s y a $\vec{w}$

e) La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los dos planos anteriores

Ejemplo:

Determina la recta perpendicular común a las rectas:

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

1º.- Estudiar la posición relativa

Sean $\vec{u}_r$ (-2, 1, 3) vector director de r y $\vec{v}_s$ (2, 1, 3) vector director de s

Sean P(1, 0, -1) un punto de r y Q(0, 2,2) un punto de s $\to \overrightarrow{PQ}$ = (-1,2,3)

$$\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \to \left\{\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{PQ}\right\} \text{ son linealmente independiente} \to \text{r y s se cruzan}$$

2º.- Hallar $\vec{w}$ vector perpendicular a los vectores de dirección de r y s.

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6,12,0) \longrightarrow \vec{w}\,(1,2,0)$$

3º.- Plano π_r que contiene a r y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -6(x-1) + 3y - 5(z+1) = 0 \to \pi_r : 6x - 3y + 5z - 1 = 0$$

4º.- Plano π_s que contiene a s y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to -6x + 3(y-2) + 5(z-2) = 0 \to \pi_r : 6x - 3y - 5z + 16 = 0$$

5º.- La perpendicular común es: $\begin{cases} 6x-3y+5z-1=0 \\ 6x-3y-5z+16=0 \end{cases}$

2ª FORMA:

Determinando un vector ortogonal a los vectores directores de r y s:

a) Tomamos un punto genérico, P_r, de r y otro, P_s, de s (tendrá por coordenadas las correspondientes a las ecuaciones paramétricas de la recta r y s, respectivamente).

b) Imponemos que el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ sea ortogonal a r y a s. Se obtiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas λ y μ que permiten conocer los puntos y luego su distancia.

c) Estos dos puntos determinan la ecuación de la perpendicular común.

Ejemplo:

Determina la recta perpendicular común a las rectas y la distancia entre ellas:

$$r: x = y = z \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

- Calculamos un punto genérico de r y s:

$P_r = (\lambda, \lambda, \lambda)$ punto genérico de r

$P_s = (1+\mu, 2+2\mu, 2\mu)$ punto genérico de s

$$\rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)$$

- Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}$ sea ortogonal a r y a s

$$\overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_r} \rightarrow (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)\cdot(1,1,1) = 0 \rightarrow -3\lambda+5\mu+3=0$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_s} \rightarrow (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)\cdot(1,2,2) = 0 \rightarrow -5\lambda+9\mu+5=0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -3\lambda+5\mu+3=0 \\ -5\lambda+9\mu+5=0 \end{cases} \rightarrow \mu = 0\,;\, \lambda = 1$$

Sustituyendo estos dos valores obtenemos dos puntos:

  - Si $\lambda = 1 \rightarrow P_r = (1,1,1)$
  - Si $\mu = 0 \rightarrow P_s = (1,2,0)$

- La perpendicular común es la recta $P_r + <\overrightarrow{P_rP_s}>$

$$\overrightarrow{P_rP_s}(0,1,-1) \rightarrow \text{Recta: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$$

- La distancia entre las dos rectas es igual a la distancia entre los puntos $P_r = (1,1,1)$ y $P_s = (1,2,0)$:

$$d(r,s) = d(P_r, P_s) = \left|\overrightarrow{P_rP_s}\right| = \sqrt{2}$$