1 SISTEMA DE REFERENCIA. ESPACIO AFÍN

Para localizar un punto o un objeto en el espacio necesitamos un sistema de referencia.

Definición:

Un ***sistema de referencia*** en el espacio $\mathbb{R}^3$ es una cuaterna $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ formada por:

- Un punto fijo O que se llama origen del sistema.
- Una base de vectores $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de módulo 1 (unitarios) y perpendiculares entre sí (ortogonales).

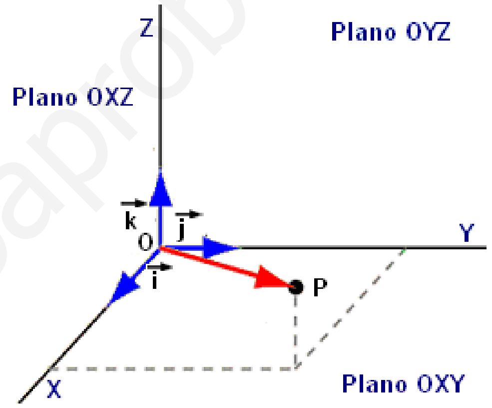
Los tres vectores de la base determinan con el origen unos ***ejes de coordenadas***: OX, OY y OZ.
Además determinan tres planos OXY, OXZ, OYZ, que se denominan ***planos cartesianos*** del sistema.

A cada punto P del espacio le asociamos el vector $\overrightarrow{OP}$, llamado ***vector de posición*** de P respecto del punto fijo O.

Todo punto de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P(x, y, z) \text{ si } \overrightarrow{OP} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

Las coordenadas del punto P coinciden con las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto a la base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.



Definición:

Se llama ***espacio afín*** asociado al espacio vectorial V_3 al espacio de puntos, E_3, dotado de una aplicación f

$$F: E_3 \text{ x } E_3 \to V_3$$
$$(A, B) \to \overrightarrow{AB}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. Dado un vector $\vec{u} \in V_3$ y un punto O de E_3, existe un único punto P de E_3 tal que f(O,P) = $\vec{u}$

   Es decir, $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$

2. f(A, B) = $\vec{0}$ si y sólo si A = B.

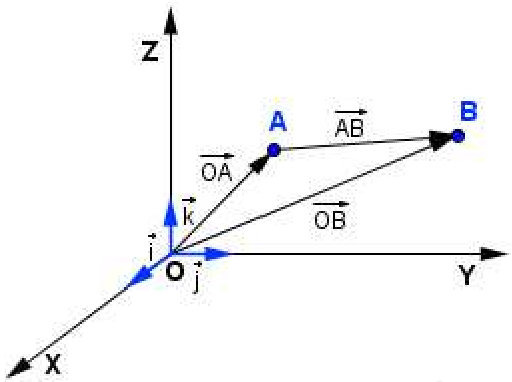
   Es decir, $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$

3. Siendo A, B y C tres puntos cualesquiera de E_3, se verifica: f(A, B) = f(A,C) + f(C,B).

   Es decir, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

En este tema estudiaremos las propiedades relativas a problemas de incidencia, paralelismo e intersección.

1.1. Coordenadas de un vector dado dos puntos.

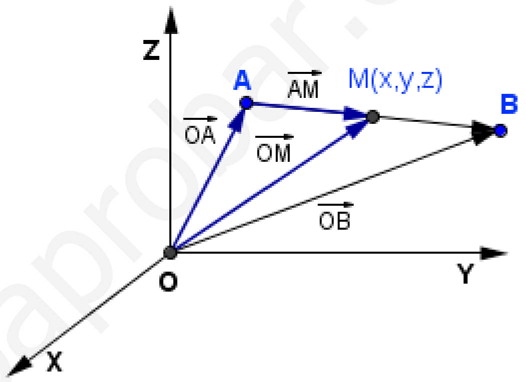


Dados los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$,

las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

1.2. Coordenadas del punto medio de un segmento.



Dados los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$.
Sea M el punto medio de un segmento AB.
Se verifica:

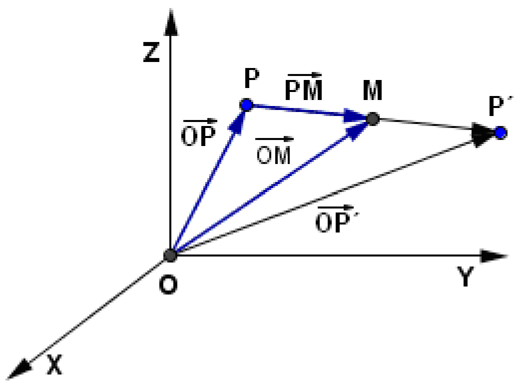
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$$

Las coordenadas del ***punto medio de un segmento*** son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_M=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$$

1.3. Punto simétrico de un punto respecto de otro dado.

El ***punto simétrico*** de un punto P respecto de otro punto M es el punto P´ que verifica que M es el punto medio del segmento PP´.



Sean los puntos $P(x,y,z)$ y $M(m_x, m_y, m_z)$.

Consideremos el punto P´(x´, y´, z´) el simétrico de P respecto de M.

Se verifica: $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+2\cdot\overrightarrow{PM}$

$(x', y', z') = (x, y, z) + 2\,(m_x - x,\ m_y - y,\ m_z - z)$

Igualando componentes se obtiene:

$x' = 2m_x + x$; $y' = 2m_y + y$; $z' = 2m_z + z$

Ejemplo:

Calcular el punto simétrico de P(2,-1,3) respecto del punto M(-1,-2,4)

Sea P´(x,y,z) el punto simétrico de P. Se verifica:

$$\overrightarrow{PP'}=2\cdot\overrightarrow{PM}\rightarrow (x-2,\ y+1,\ z-3)=2(-3,-1,1)\rightarrow\begin{cases}x-2=-6\rightarrow x=-4\\ y+1=-2\rightarrow y=-3\\ z-3=2\rightarrow z=5\end{cases}\rightarrow P'(-4,-3,5)$$

2 ECUACIONES DE LA RECTA

Al igual que ocurre en el plano, una **recta** en el espacio queda determinada conociendo un punto P y un vector no nulo $\vec{u}$ que se llama ***vector director*** de la recta.

Estudiamos a continuación las diferentes formas que puede adoptar la ecuación de una recta.

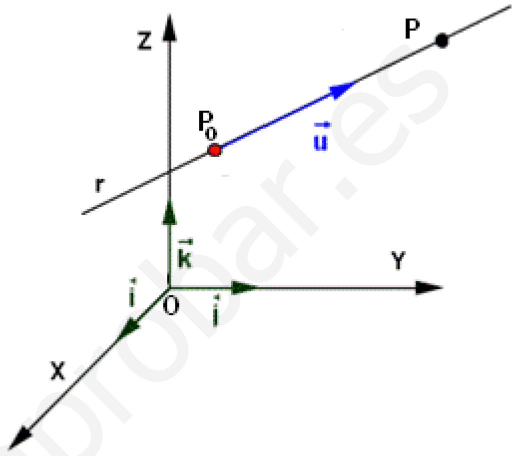
1) Ecuación vectorial

Una recta r queda determinada por:

- Un punto P_0 (x_0,y_0,z_0) de la recta.
- Un vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ cuya dirección es la recta.

Consideremos un punto cualquiera de la recta $P(x, y, z)$

Para que dicho punto pertenezca a la recta r, el vector $\overrightarrow{P_0P}$ tiene que tener la misma dirección que el vector $\vec{u}$, es decir, debe ser proporcional a $\vec{u}$:



$$\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u}\text{, siendo } t \in \mathbb{R}$$

Como $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} \rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u}$

ECUACIÓN VECTORIAL: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u}$ con $t \in \mathbb{R}$, cuya expresión en coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x_0,y_0,z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

2) Ecuaciones paramétricas

Partiendo de la ecuación vectorial de la recta:

$$(x, y, z) = (x_0,y_0,z_0) + t \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

Igualando coordenadas, obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot u_1 \\ y = y_0 + t\cdot u_2 \\ z = z_0 + t\cdot u_3 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

3) Ecuación en forma continua

Considerando las ecuaciones paramétricas, despejamos t en cada una de ellas e igualando, obtenemos las ecuaciones de la recta que no dependen de ningún parámetro

$$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

4) Ecuaciones implícitas

Operando dos a dos en la forma continua obtenemos las ecuaciones implícitas (intersección de dos planos):

$$\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} \qquad \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3} \qquad \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{z-z_0}{u_3}$$

La tercera ecuación es combinación lineal de la otras dos, suprimiéndola y operando obtenemos:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2} \rightarrow u_2(x-x_0)=u_1(y-y_0) \rightarrow u_2x-u_1y+(u_1y_0-u_2x_0)=0$$

$$\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3} \rightarrow u_3(y-y_0)=u_2(z-z_0) \rightarrow u_3y-u_2z+(u_2z_0-u_3y_0)=0$$

que se pueden reescribir de la forma:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

4) Incidencia punto y recta

Un punto P_1 (x_1,y_1,z_1) pertenece a la recta $r:<P_0+t\cdot\vec{u}>$ si y, sólo si, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t\cdot u_1 \\ y_1 = y_0 + t\cdot u_2 \\ z_1 = z_0 + t\cdot u_3 \end{cases}$$

es compatible. Es decir, el rango de la matriz:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}=1$$

5) Condición para que tres puntos estén alineados

Dados tres puntos $A(a_1, a_2, a_3)$,$B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ están alineados si y sólo si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes. Es decir:

$$\text{A, B y C alineados} \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ a_1-c_1 & a_2-c_2 & a_3-c_3 \end{pmatrix}=1$$

Ejemplo

1) Determinar las ecuaciones paramétricas e implícitas de cada uno de los ejes de coordenados.

Vectorial:

$$\text{Eje OX}: \vec{x}=t\cdot\vec{i} \quad ; \quad \text{Eje OY}: \vec{y}=t\cdot\vec{j} \quad ; \quad \text{Eje OZ}: \vec{z}=t\cdot\vec{k}$$

Paramétricas:

$$\text{Eje OX}: \begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OY}: \begin{cases} x=0 \\ y=y_0+\alpha\cdot t \\ z=0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OZ}: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z_0+\alpha\cdot t \end{cases}$$

Continua:

$$\text{Eje OX}: \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0} ; \quad \text{Eje OY}: \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0} ; \quad \text{Eje OZ}: \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

Implícitas:

$$\text{Eje OX}: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OY}: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} ; \quad \text{Eje OZ}: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ejemplos

2) Expresar en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y tiene como vector director $\vec{u} = (2,1,-3)$

- Ecuación vectorial: (x, y, z) = (1,2,3) + t · (2,1,-3)
- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

- Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

- Ecuaciones implícitas:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3} \rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x-1 = 2y-4 \rightarrow x-2y+3=0 \\ \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-3} \rightarrow -3y+6 = z-3 \rightarrow 3y+z-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3y+z-9=0 \end{cases}$$

3) Halla las ecuaciones en forma paramétricas y continua de la recta r: $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$

Para obtener la forma paramétricas resolvemos el sistema que es compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y=3-z \\ x-y=1+2z \end{cases}$$

E1 + E2: Sumando ambas ecuaciones: 3x = 4 + z $\rightarrow$ z = 3x – 4

Sustituyendo en E1: 2x + y = 3 – z $\rightarrow$ y = 3 – z – 2x = 3 – 3x + 4 – 2x = 7 – 5x

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 7-5t \\ z = -4+3t \end{cases}$

De aquí obtengo un punto P(0,7,-4) y un vector director $\vec{u} = (1,-5, 3)$

Forma continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z+4}{3}$

4) Comprobar si los siguientes puntos están alineados: A(0,1,1), B(-1,-1,4) y C(3,7,-8)

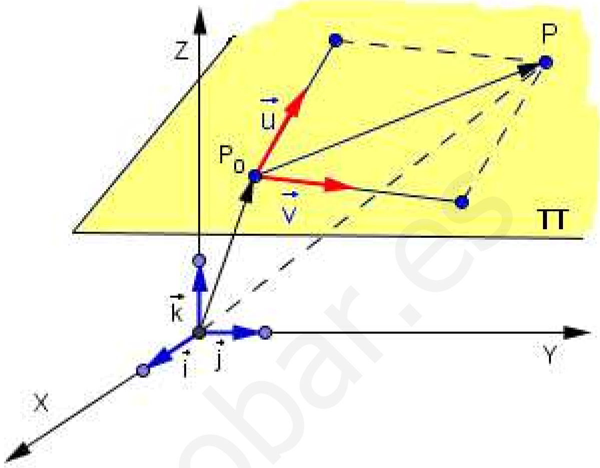
$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,3)$; $\overrightarrow{AC} = (3,6,-9)$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \text{A, B y C están alineados.}$$

La recta que pasa por los tres puntos es: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$

3 ECUACIONES DEL PLANO

Para determinar un plano del espacio se necesita conocer un punto P_0 y un par de vectores que formen una base, es decir, que sean linealmente independientes.



Consideramos:

- Un punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ del plano.
- Dos vectores directores: $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v}\,(v_1, v_2, v_3)$

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano.

Se verifica:

- $\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ + s, siendo t, s $\in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$

1) Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v} \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$$

Expresada en coordenadas es:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\cdot(u_1, u_2, u_3)) + s\cdot(v_1, v_2, v_3)$$

2) Ecuaciones paramétricas:

Partiendo de la ecuación vectorial e igualando coordenadas, obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot u_1 + s\cdot v_1 \\ y = y_0 + t\cdot u_2 + s\cdot v_2 \\ z = z_0 + t\cdot u_3 + s\cdot v_3 \end{cases} \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$$

3) Ecuación general o implícita:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\cdot u_1 + s\cdot v_1 \\ y - y_0 = t\cdot u_2 + s\cdot v_2 \\ z - z_0 = t\cdot u_3 + s\cdot v_3 \end{cases}$$

Como se verifica que $\overrightarrow{P_0P} = t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$ $\rightarrow$ los tres vectores son linealmente dependientes, por tanto,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar este determinante obtenemos una expresión de la forma: $Ax + By + Cz + D = 0$

4) Ecuación normal del plano.

Sea el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ y sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos del plano π.

El vector $\overrightarrow{PQ}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ pertenece al plano π.

Como P y Q son dos puntos del plano verifica su ecuación. Por tanto, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{array}\right\} \to A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

Es decir, $(A, B, C) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \to$ El vector (A, B, C) es ortogonal a cualquier vector del plano π.

A este vector se le llama ***vector normal*** al plano. De esta forma, se puede caracterizar un plano con solo un punto y un vector ortogonal a él. Es decir:

Dado el vector $\vec{u}\,(A, B, C)$ y $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano el plano π perpendicular al vector $\vec{u}$ y que pasa por P es

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

Donde D se determina imponiendo que el punto P debe verificar la ecuación del plano.

5) Ecuación del plano que contiene tres puntos

El plano que contiene los puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ y $C(x_2, y_2, z_2)$ viene determinado por un punto y dos vectores de dirección.

Determinamos el plano que pasa por el punto A y tiene como vectores de dirección $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, que deben ser linealmente independientes.

Los vectores de dirección son: $\overrightarrow{AB}\,(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ y $\overrightarrow{AC}\,(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$

6) Condición para que cuatro puntos sean coplanarios

Dados los puntos $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ y $D(x_3, y_3, z_3)$, la condición necesaria y suficiente para que sean coplanarios es:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AD} \text{ son l.d.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_0 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

6) Casos particulares.

a) Plano que pasa por el origen: $Ax + By + Cz = 0$

b) Plano paralelos a los ejes: Eje OX $\to$ $By + Cz + D = 0$

Eje OY $\to$ $Ax + Cz + D = 0$

Eje OZ $\to$ $Ax + By + D = 0$

c) Plano paralelos a los planos coordenados: Plano XY $\to$ $z = k$

Plano XZ $\to$ $y = k$

Plano YZ $\to$ $x = k$

Ejemplos

1. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícita del plano determinado por el punto A(1, -2, 1) y los vectores de dirección $\vec{u}$ (3, 2, 5) y $\vec{v}$ (1, -1, 3).

Los dos vectores son linealmente independientes ya que no son proporcionales: $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{5}{3}$

- Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t + s \\ y = -2 + 2t - s \\ z = 1 + 5t + 3s \end{cases}$$

- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 1 \\ y+2 & 2 & -1 \\ z-1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11(x-1) - 4(y+2) - 5(z-1) = 0 \rightarrow 11x - 4y - 5z - 14 = 0$$

2. Hallar la ecuación del plano determinado por los puntos A(1, 0, 3), B(-2, 1, 3) y C(-1, 2, 1)

- Calculamos los dos vectores de dirección: $\overrightarrow{AB}$ (-3, 1, 0) ; $\overrightarrow{AC}$ (-2, 2, -2)
- Son linealmente independientes: $\frac{-3}{-2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{-2}$
- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 + 3y + 2(z-3) = 0 \rightarrow x + 3y + 2z - 7 = 0$$

3. Comprobar si el punto P(4, -3, 1) pertenece al plano de ecuación $\pi: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - t - 2s \\ z = -3 + 2t + s \end{cases}$

El plano viene determinado por el punto A(1, 2, -3) y los vectores $\vec{u}$ (1, -1, 2) y $\vec{v}$ (1, -2,1)

Para que el punto P pertenezca al plano se tiene que cumplir que los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean l.d.

Es decir, $P \in \pi \leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 3 + (-6) = 0$$

4. Comprobar que los puntos A(1, 2, 3), B(0, 1, 1), C(1, 0, 1) y D(1, 1, 0) son coplanarios.

Si son coplanarios los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes.

$\overrightarrow{AB}$ (-1, -1, -2) ; $\overrightarrow{AC}$ (0, -2, -2) y $\overrightarrow{AD}$ (0,-1,-3) son l.d. si $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AD} \text{ son l.i.} \rightarrow \text{A, B, C y D no son coplanarios.}$$

Ejemplos

5. Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto P(0,1, 3) y contiene a la recta $r:\begin{cases} x=4t \\ y=5-2t \\ z=2t \end{cases}$

- Todo plano queda determinado por un punto y dos vectores de dirección.
- Vector de dirección de r: $\vec{u}$ (4, -2, 2)
- Un punto de r: Q(0, 5, 0)
- Otro vector de dirección del plano es $\overrightarrow{PQ}$: (0, 4, -3)
- El plano que buscamos viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$:

$$\pi:\begin{cases} x=4t \\ y=1-2t+4s \\ z=3+2t-3s \end{cases}$$

6. Calcular la ecuación del plano π , que siendo perpendicular a la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-1}$ pasa por el punto P(-1, -2, 3)

La recta tiene de vector director $\vec{u}$(2, -1, -1).

Dicho vector es un vector normal al plano. Por tanto, la ecuación del plano es: 2x – y – z + D = 0.

Determinamos D imponiendo que el plano pasa por el punto P: 2(-1) – (-2) – 3 + D = 0 → D = 3

El plano es: π : 2x – y – z + 3 = 0.

7.- Calcular las ecuaciones de los planos paralelos a los planos coordenados que pasan por el punto P(1,2,3).

- Paralelo al plano OXY: z = 0

  Como pasa por el punto P, se verifica que z = 3
- Paralelo al plano OXZ: y = 0

  Como pasa por el punto P, se verifica que y = 2
- Paralelo al plano OYZ: x = 0

  Como pasa por el punto P, se verifica que x = 1

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(0, 6, 2) y es paralela a las rectas r y s, siendo

$$r:\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$$

Se reduce a calcular la ecuación que pasa por P y tiene como vectores de dirección los de r y s:

$$\vec{u}_r(0,-1,2) \quad ; \quad \vec{u}_s(1,0,1)$$

Plano: $\begin{vmatrix} x & y-6 & z-2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ → -x + 2(y – 6) + z – 2 = 0 → -x + 2y + z – 14 = 0

4 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

4.1. Ecuaciones en forma implícita

$$r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

Hacemos uso del teorema de Rouché -Frobenius:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

- Rango (A) = rango (A*) = 2 → S.C.I. → r y s tienen infinitos puntos en común → r y s coincidentes
- Rango (A) = 2 ; rango (A*) = 3 → S.I. → r y s no tienen puntos en común y son coplanarias → r y s paralelas
- Rango (A) = rango (A*) = 3 → S.C.D. → r y s tienen un punto en común → r y s secantes
- Rango (A) = 3 ; rango (A*) = 4 → S.I. → r y s no tienen puntos en común → r y s se cruzan

4.2. Ecuaciones en forma paramétricas o continua

$r:\vec{x}=\vec{a}+\alpha\vec{u}$, siendo $\vec{a}$: vector de posición del punto $A(x_1,y_1,z_1)\in$ r y $\vec{u}$: vector de dirección de r

$s:\vec{x}=\vec{b}+\lambda\vec{v}$, siendo $\vec{b}$: vector de posición del punto $B(x_2,y_2,z_2)\in$ s y $\vec{v}$: vector de dirección de s

Si existe un punto común a las dos rectas, existiría algún valor de α y λ que serían soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} x_1+\alpha u_1 = x_2+\lambda v_1 \\ y_1+\alpha u_2 = y_2+\lambda v_2 \\ z_1+\alpha u_3 = z_2+\lambda v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha u_1-\lambda v_1 = x_2-x_1 \\ \alpha u_2-\lambda v_2 = y_2-y_1 \\ \alpha u_3-\lambda v_3 = z_2-z_1 \end{cases}$$

Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_2-x_1 \\ u_2 & v_2 & y_2-y_1 \\ u_3 & v_3 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$

- Si rango A* = rango A = 1 → r y s son coincidentes

  Los vectores u, v, PQ son l.d.

- Si rango A* = 2, rango A = 1 → r y s son paralelas s

  S.I., no hay punto en común y como rgA = 1, los vectores son paralelos

- Si rango A* = 2, rango A = 2 → r y s son secantes

  Sistema C.D. → tienen una solución única

- Si rango A* = 3, rango A = 2 → r y s se cruzan

  Los vectores u, v y AB son l.i. no tienen ningún punto en común y los tres tienen ≠ direcciones, las rectas se *cruzan* en el espacio

Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-1+t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=6s \\ y=-1+2s \\ z=1+2s \end{cases}$$

Sean $\vec{u}_r(3,1,1)$ dirección de r ; $\vec{u}_s(6,2,2)$ dirección de s

Ambos vectores son proporcionales, por tanto, ambas rectas tienen la misma dirección.

Comprobamos que el punto A(1, 2, -1)$\in$ r no pertenece a la recta s:

$$s:\begin{cases} 1=6s \\ 2=-1+2s \to s=\dfrac{3}{2} \\ -1=1+2s \to s=1 \end{cases} \to A\notin r \to \text{Las rectas son paralelas}$$

2ª forma:

A(1, 2, -1)$\in$ r ; B(0,-1,1) $\in$ s $\to$ $\overrightarrow{AB}$(-1, -3, 2)

Son paralelas porque $rg\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=2$; $rg\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=1$

2) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=3-3s \\ y=5-2s \\ z=2s \end{cases}$$

Sean $\vec{u}_r(1,-1,2)$ dirección de r ; $\vec{u}_s(-3,-2,2)$ dirección de s

Ambos vectores son linealmente independientes $\to$ las rectas tienen distinta dirección

Sea A(1, 2, 4)$\in$ r y B(3,5,0) $\in$ s, el vector $\overrightarrow{AB}$(2, 3, -4)

Estudiamos el rango de la matriz:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \to rg\ A^*=2 \to \text{Ambas rectas se cortan en un punto}$$

Para determinar las coordenadas del punto, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2=3s+t \\ 3=2s-t \\ -4=-2s+2t \end{cases} \to \begin{cases} 2=3s+t \\ 3=2s-t \end{cases} \to s=1,\ t=-1$$

Llevando uno de estos valores a la ecuación de la recta correspondiente obtenemos las coordenadas del punto de intersección:

Si t = -1, sustituyendo en la ecuación de r obtenemos el punto Q (0,3,2)

Por tanto, r y s se cortan en el punto Q(0,3,2)

Ejemplos

3) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}2x+y=-5\\4x-z=-10\end{cases}\qquad s:\begin{cases}2y-z=-7\\2x-3y=8\end{cases}$$

Estudiamos el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&0&-1\\0&2&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\4&0&-1&-10\\0&2&-1&-7\\2&-3&0&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\4&0&-1&-10\\0&2&-1&-7\\2&-3&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow[F4=F4-F1]{F2=F2-2F1}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&2&-1&-7\\0&-4&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow[F4=F4-2F2]{F3=F3+F2}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&0&-2&-7\\0&0&2&13\end{pmatrix}\xrightarrow{F4=F4+F3}\begin{pmatrix}2&1&0&-5\\0&-2&-1&0\\0&0&-2&-7\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

Luego, rg $A^* = 4$

Por tanto, las dos rectas se cruzan

4) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(0, 3, 2) y corta a las rectas r y s de ecuación:

$$r:\begin{cases}x-y+z=0\\2x+y=3\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x-2y+z=0\\x-2y-z=4\end{cases}$$

Si las rectas r y s se cortan en un punto, el problema se reduce a determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Si ambas rectas son paralelas y definen un plano, las rectas que pasan por P son infinitas si el punto está en dicho plano.

Determinamos la posición de r y s, para ello estudiamos el rango de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\1&-2&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\qquad A^*=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&1&0&3\\1&-2&1&0\\1&-2&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&1&0&3\\1&-2&1&0\\1&-2&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&3&-2&3\\0&-1&0&0\\0&-1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&3&-2&3\\0&-1&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&-2&4\end{pmatrix}\to \text{rg } A=\text{rg } A^*=3$$

Luego ambas rectas se cortan en un punto. Para determinar sus coordenadas resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{cases}x-y+z=0\\y=0\\-2z=4\end{cases}\to\begin{cases}x=-z=2\\y=0\\z=-2\end{cases}\to \text{Punto de intersección: } Q(2, 0, -2)$$

Ecuación de la recta que pasa por P(0, 3, 2) y Q(2, 0, -2) : $\overrightarrow{PQ}$ (2,-3,-4)

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-2}{-4}$$

5 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

5.1. Ecuaciones en forma implícita

Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

- Si rango A = 2 = rango A* $\rightarrow$ π_1 y π_2 se cortan en una recta.

  Si r(A) = 2 $\rightarrow$ Sistema con infinitas soluciones, las ecuaciones son independientes y, por tanto, los planos se cortan en una recta.

  Para hallar su ecuación, basta resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

- Si rango A = 1 ; rango A* = 2 $\rightarrow$ π_1 y π_2 son paralelos.

  El sistema es incompatible y los planos no tienen puntos comunes.

  Esta condición es equivalente a: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

- Si rango A = 1 = rango A* $\rightarrow$ π_1 y π_2 son coincidentes.

  El sistema es compatible indeterminado. Sus dos ecuaciones son equivalentes.

  Esta condición es equivalente a: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

5.2. Haz de planos

Se llama ***haz de planos*** al conjunto de todos los planos que pasan por una cierta recta denominada arista del haz.

Supongamos que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta r:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Formamos una combinación lineal de las ecuaciones de ambos:

$$\alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \beta\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0$$

Demostración

Para cada valor de α y β, obtenemos la ecuación de un plano que contiene a la recta r.

Recíprocamente, si un plano contiene a la recta r, su ecuación es combinación lineal de las ecuaciones de π_1 y π_2.

Luego, la expresión anterior es la *ecuación* del haz de de planos que contiene a la recta r.

Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi: x - y + z = 0 \qquad \pi': x - y = 0$$

Consideramos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango (A) = 2 $\rightarrow$ ambos planos tienen distinta dirección $\rightarrow$ se cortan en una recta.

La ecuación de la recta es $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función de los valores del parámetro m:

$$\pi: mx + y - z = 1 \qquad \pi': 2x - y + mz = 3m$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & m & 3m \end{pmatrix}$$

Rg A = 2 porque si $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow m^2 + 2 \neq 0 \ \forall\, m$ $\rightarrow$ Los dos planos tienen distinta dirección $\rightarrow$

Se cortan para cualquier valor de m

3) Estudiar la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi: 3x - 2y + z = -1 \qquad \pi': -6x + 4y - 2z = 4$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rango (A) = 1 $\rightarrow$ Ambos planos tienen la misma dirección

Rango(A*) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\rightarrow$ el sistema es incompatible $\rightarrow$ Los planos no tienen punto en común

Por tanto, los dos planos son paralelos.

4) Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, -3) y es paralelo al plano π, cuya ecuación es

$$\pi: x - y + z - 1 = 0$$

Buscamos un plano paralelo a π, por tanto, sus vectores normales son proporcionales.

Sea $\vec{v}$ vector normal a π: $\vec{v}\,(1, -1, 1)$

Todo plano paralelo a π es de la forma: $x - y + z + k = 0$

Determinamos k, imponiendo que el plano pasa por P: $1 - 2 - 3 + k = 0 \rightarrow k = 4$

Por tanto, el plano buscado es: $x - y + z + 4 = 0$

6 POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Una recta y un plano pueden adoptar las siguientes posiciones: se cortan en un punto, son paralelas o la recta está contenida en el plano.

6.1. Recta en paramétricas y plano en implícita

Consideremos la recta r y el plano π:

- $\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow$ Vector normal : $\vec{n}\,(A, B, C)$
- $r : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \rightarrow$ Vector de dirección: $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$

Podemos obtener los puntos de intersección de ambos sustituyendo x, y , z en la ecuación del plano, resultando una ecuación con la incógnita t:

$$A(x_0 + tu_1) + B(y_0 + tu_2) + C(z_0 + tu_3) + D = 0$$

1) Si la ecuación tiene solución: la recta y el plano se cortan en un punto.
2) Si no tiene solución: la recta y el plano son paralelos.
3) Si tiene infinitas soluciones: la recta está contenida en el plano

2ª forma:

1) Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ y $P \in \pi \rightarrow$ la recta está contenida en el plano
2) Si $\vec{u} \perp \vec{n}$ y $P \notin \pi \rightarrow$ la recta y el plano son paralelos
3) Si $\vec{u} \not\perp \vec{n} \rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto.

6.2. Recta y plano en forma implícita

Consideremos la recta r y el plano π:

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \pi : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Hacemos uso del teorema de Rouché -Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- Rango(A) = 2 = rango(A*) $\rightarrow$ La recta está contenida en el plano

  El sistema es compatible indeterminado. Los tres planos tienen una recta en común

- Rango(A) = 2, rango(A*) = 3 $\rightarrow$ La recta y el plano son paralelos.

  El sistema es incompatible. Los tres planos no tienen puntos en común.

- Rango(A) = rango(A*) = 3 $\rightarrow$ La recta y el plano son secantes.

  El sistema es compatible determinado. Los tres planos tienen un punto en común.

Ejemplos

1) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = z+3$ y el plano π: $3x + 2y - z = 0$

Vector de dirección de la recta: $\vec{u}(2,2,1)$

Vector normal : $\vec{n}(3, 2, -1)$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 6 + 4 - 1 = 9 \rightarrow \vec{u} \not\perp \vec{n} \rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto

Determinamos el punto de corte:

Consideramos las ecuaciones paramétricas de la recta $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación del plano: $6t + 2(3 + 2t) - (t - 3) = 0 \rightarrow 6t + 6 + 4t - t + 3 = 0 \rightarrow t = -1$

El punto de corte es P(-2, 1, -4)

2) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ y el plano π: $2x + 3y - z = 1$

Hacemos uso del teorema de Rouché -Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango A = 2 ya que F2 – F1 = F3

Rango A* = 3 ya que $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3+F1-F2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema es incompatible $\rightarrow$ No hay puntos en común

Por tanto, la recta y el plano son paralelos

3) Estudiar la posición relativa de la recta $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$ y el plano π: $x - y + mz = 0$

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & m & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = m^2 - 1 = 0 \rightarrow m = 1, m = -1$

- $m = 1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg A* = 2 $\rightarrow$ La recta está contenida en el plano.
- $m = -1 \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F2]{F2=F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Sistema incompatible $\rightarrow$ r y π paralelos
- $m \neq \pm 1 \rightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto

7 POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Para estudiar la posición relativa de tres planos consideramos la forma implícita:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

Hacemos uso del teorema de Rouché –Frobenius, para ello tomamos la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada, A*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

Los casos que se pueden dar son:

1) rg(A) = 3 = rg (A*) $\longrightarrow$ Los planos se cortan en un punto.

El sistema de ecuaciones es compatible determinado, y tiene una única solución. Los planos tienen sólo un único punto común.

2) rg(A) = 2 ; rg (A*) = 3

El sistema de ecuaciones es incompatible, no tiene solución. Los tres planos no tienen ningún punto en común. Se pueden presentar dos casos:

2.1) Todas las submatrices de A de orden 2 x 3 tienen rango 2. Los planos se cortan dos a dos, entre los planos considerados no hay dos que sean paralelos. Por tanto, cada dos planos se cortan según una recta.

2.2) Una de las submatrices de A de orden 2 x 3 tiene rango 1. Dos planos son paralelos y el tercero corta a los otros dos en rectas paralelas.

3) rg(A) = 2 = rg (A*) = 2

El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, y tiene infinitas soluciones. Los planos se cortan en una recta. Pueden presentarse en este caso dos situaciones distintas:

3.1.) Todas las submatrices de A* de orden 2 x 4 tienen rango 2. Los planos son distintos. Por tanto, se cortan los planos en una recta.

3.2) Una de las submatrices de A* de orden 2 x 4 tiene rango 1. Dos planos son coincidentes y el tercero corta a los otros dos en una recta.

4) rg(A) = 1 ; rg (A*) = 2

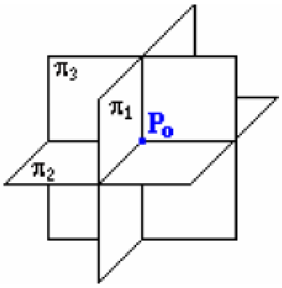
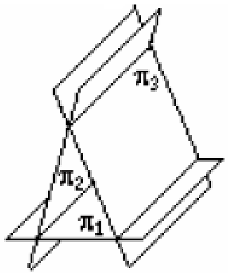
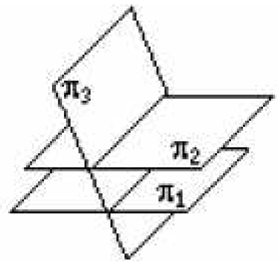
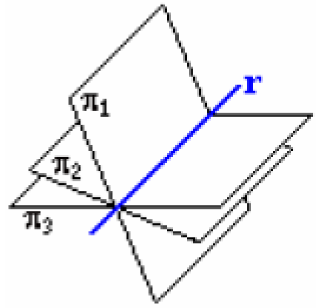
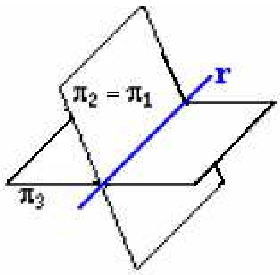
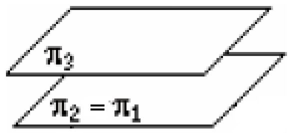
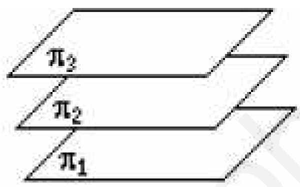
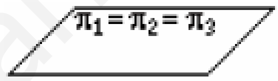
El sistema de ecuaciones es incompatible, no tiene solución común. Se pueden presentar dos casos:

4.1.) Todas las submatrices de A* de orden 2 x 4 tienen rango 2. Los tres planos son paralelos.

4.2) Una de las submatrices de A* de orden 2 x 4 tiene rango 1. Dos planos son coincidentes y el tercero es paralelo a los otros dos.

5) Si rg(A) = 1 = rg(A*)

El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Los tres planos coinciden.

<table>
<tr><td>Concurrentes en un punto</td><td>Cortan 2 a 2 en una recta</td><td>2 paralelas y una secante</td><td>Secantes en una recta</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1 corta en una recta a 2 coincidentes</td><td>2 coincidentes y 1paralelo</td><td>Planos paralelos</td><td>Planos coincidentes</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ejemplos

1) Estudia la posición relativa de los tres planos:

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+y-4z=3 \\ x+5y-5z=1 \end{cases}$$

Hacemos uso del teorema de Rouché –Frobenius, para ello tomamos la matriz A de los coeficientes y la matriz ampliada, A*:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-F1]{F2=F2-2F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3+F2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El sistema es incompatible}$$

No hay puntos comunes a los tres planos.

Rango A = 2 ; Rango A^* = 3

$$A_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \;;\; A_{13}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \;;\; A_{23}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Las tres submatrices 2 x 3 de A tienen rango 2 → Los planos tienen distintas direcciones 2 a 2

Por tanto los planos se cortan 2 a 2 según tres rectas.

Ejemplos

2) Estudia la posición relativa de los tres planos:

$$\begin{cases} 5x + z = 7 \\ x - 2y - z = 1 \\ 3x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=F3-3F1]{F2=F2-5F1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2=F2-6F3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 8 \neq 0 \to$ rg(A) = rg(A*) = 3 $\to$ Sistema compatible determinado

Luego, los tres planos se cortan en un punto.

Para determinar las coordenadas de dicho punto resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -8y = 8 \\ 3y + z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = -1 \\ -3 + z = -1 \to z = 2 \\ x + 2 - 2 = 1 \to x = 1 \end{cases} \to \text{Las coordenadas del punto son (1,-1,2)}$$

3) Discutir la posición relativa de los siguientes planos según los distintos valores de "a":

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Det A = $a^3 - 3a + 2 = 0 \to (a-1)^2(a+2) = 0 \to a = 1,\ a = -2$

- Si $a \neq 1, a \neq -2 \to$ rg(A*) = rg(A) = 3 $\to$ Los tres planos se cortan en un punto.
- Si a = 1 $\to A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Los tres planos son coincidentes
- Si a = -2 $\to A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$ rg (A*) = 3

  No hay puntos comunes a los tres planos

  Se comprueba fácilmente que las tres submatrices de orden 2 x 3 de A son de rango 2.

  Por tanto, los tres planos se cortan 2 a 2 en una recta.