1 PROBLEMAS DE ÁNGULOS

1.1. Ángulos entre dos rectas

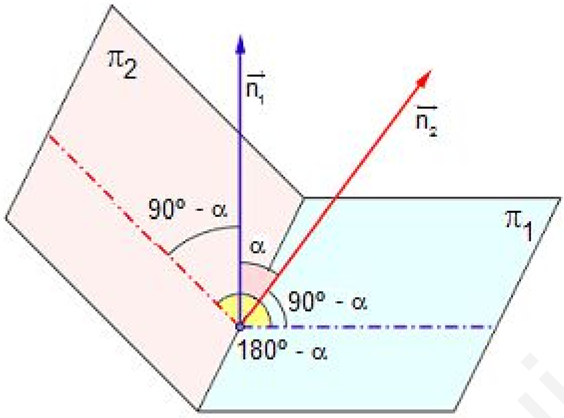
Definición

- Se define el **ángulo entre dos rectas** que se cortan r y s como el menor de los ángulos que forman sus respectivos vectores de dirección. En el caso de dos rectas que se cruzan, se define el ángulo de las dos rectas como el formado por dos paralelas a ambas que se corten.
  - Si las dos rectas son paralelas o coincidentes el ángulo que forman será cero.
  - Si las rectas se cortan o se cruzan, la expresión analítica del ángulo entre dos rectas es:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{u}_s\right|}$$

1.2. Ángulos entre dos planos

Sean π_1 y π_2 dos planos del espacio:



$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

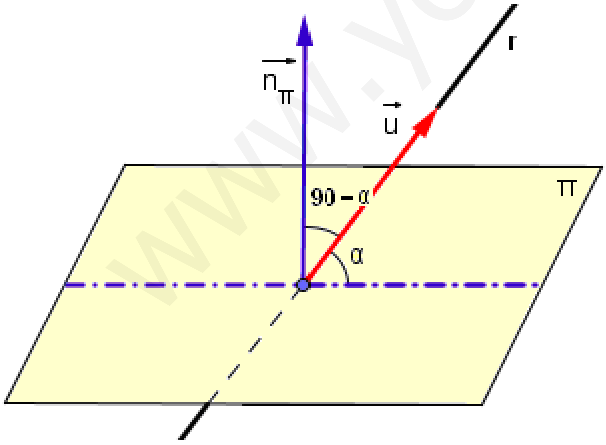
Sean $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ los vectores normales a los planos π_1 y π_2, respectivamente.

El ángulo de dos planos secantes es el menor de los ángulos que forman sus vectores normales:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$$

1.3. Ángulos entre recta y plano

Sean la recta r, de dirección $\vec{u}_r = (u_1, u_2, u_3)$, y el plano π de vector normal $\vec{n}_\pi(A,B,C)$.



Según el dibujo, el ángulo que determinan el plano y la recta es el ángulo complementario del que forman los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$.

El ángulo α queda determinado si se conoce su seno.

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{u}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|}$$

Recuerda: el coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano:

Sean la recta r, de dirección $\vec{u}_r = (u_1, u_2, u_3)$, y el plano π de vector normal $\vec{n}_\pi(A,B,C)$.

a) $\pi \perp r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \parallel \vec{u}_r \Leftrightarrow \vec{u}_r = k \cdot \vec{n}_\pi ; k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$

b) $\pi \parallel r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_\pi = 0 \Leftrightarrow Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0$

Ejemplos

1. Calcular el ángulo que forman las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

- Vector director de r: (2, -1,3) x (1, 2, 0) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6,3,5) \rightarrow |\vec{u}_r| = \sqrt{36+9+25} = \sqrt{70}$

- Vector director de s: (1,1,1) x (3, 2, -1) = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3,4,-1) \rightarrow |\vec{u}_s| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{18+12-5}{\sqrt{70}\cdot\sqrt{26}} = \frac{25}{\sqrt{1820}} \simeq 0{,}586 \rightarrow \alpha = 54^\circ\, 7'\, 32''$$

.2. Calcular el ángulo que forman los planos:

$$\pi_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0 \quad ; \quad \pi_2 : 5y - 2z + 9 = 0$$

Sean $\vec{n_1}$ (3, 2, -4) vector normal de π_1 $\qquad$ $\vec{n_2}$ (0, 5, -2) vector normal de π_2

Aplicamos la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{10+8}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{25+4}} = \frac{18}{29} \simeq 0{,}6206 \longrightarrow \alpha \simeq 51^\circ 38'$$

3. Calcular el ángulo que forman el plano y la recta:

$$\pi : x + y - 2z = 0 \quad ; \quad r: \begin{cases} 2x + z = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Determinamos el vector de dirección de r: $\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-2) \rightarrow \vec{n_\pi} \parallel \vec{u_r} \Leftrightarrow \pi \perp r$

$$\cos(90-\alpha) = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{u_r}|\cdot|\vec{n_\pi}|} = \frac{1+1+4}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+1+4}} = 1 \rightarrow 90^\circ - \alpha = 0^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

4. Determinar el plano π que pasa por el punto P(1, 0, -1), es paralelo a la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$ y es perpendicular al plano $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$

Vector normal al plano π_1: $\vec{n_1}$ (1, 1, -2)

Vector de dirección de r: $\vec{u}_r$ (2, -1, 3)

El plano π viene determinado por P y los vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{u}_r$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1) - 5y - 3(z+1) = 0 \rightarrow \pi : 2x - 5y - 3z - 5 = 0$$

2 PROBLEMA DE DISTANCIA

2.1. Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2.2. Distancia de un punto a un plano

1ª FORMA:

Sea el plano π de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ y P un punto de coordenadas $P(x_0,y_0,z_0)$

La **distancia del punto P al plano π** es la distancia entre los puntos P y Q, siendo Q la proyección de P sobre el plano.

Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π, para ello realizamos los siguientes pasos:

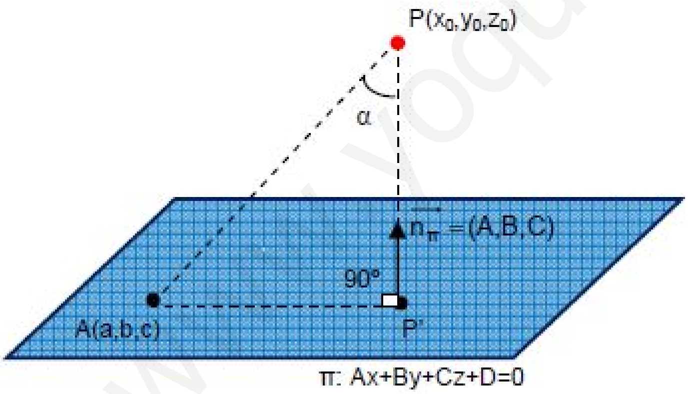
a) Determinar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto:

Como $r\perp\pi \rightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi$, siendo $\vec{n}_\pi$ vector normal al plano: $\vec{u}_r=(A,B,C)$

b) Calcular el punto de intersección de la recta r y el plano π : Q

2ª FORMA:

Sean $\vec{n}_\pi(A,B,C)$ el vector normal al plano y $P'(x_1,y_1,z_1)$ el punto proyección de P sobre el plano



Se verifica que: $d(P,\pi)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|$

Consideramos el punto A(a, b, c) del plano π :

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{PP'}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}$$

Como $\vec{n}_\pi \parallel \overrightarrow{PP'}$, se tiene que:

$$\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi\right|=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{n}_\pi\right|\cdot\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{n}_\pi\right|}$$

Igualando: $$\frac{\left|\overrightarrow{PP'}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{n}_\pi\right|}\rightarrow\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|}=\frac{\left|(x_0-a,\,y_0-b,\,z_0-c)\cdot(A,B,C)\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|}\underset{(*)}{=}\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|}$$

(*) $A\in\pi \rightarrow A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D=0 \rightarrow D=-A\cdot a-B\cdot b-C\cdot c$

Por tanto, la distancia de un punto al plano viene dado por la fórmula:

$$\boxed{d(P,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|}=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|}$$

Ejemplos

1. Calcular la distancia entre los puntos A(1,-2, 0) y B(2, -1, 3)

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,3) \longrightarrow d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+3^2} = \sqrt{11}$$

2. Hallar la distancia del punto P(3, 1, -2) al plano π : 2x + y – z + 1 = 0.

Sea $\vec{n}_\pi$ (2,1,-1) vector normal del plano.

a) Determinamos la recta r perpendicular al plano que pasa por P:

Como $r \perp \pi \rightarrow \vec{u}_r \parallel \vec{n}_\pi \rightarrow \vec{u}_r = (2,1,-1) \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases}$

b) Calculamos el punto de intersección de la recta y el plano. Para ello sustituimos las ecuaciones de r en la implícita del plano:

$$2(3+2\lambda)+1+\lambda-(-2-\lambda)+1=0 \rightarrow 6\lambda+10=0 \rightarrow \lambda=-\frac{5}{3}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de r, obtenemos las coordenadas del punto Q: $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

c) $d(P,\pi) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(-\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)\right| = \frac{1}{3}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

3. Hallar la distancia del punto P(3, 1, -2) a los planos π_1: 2x + y – z + 1 = 0 y π_2 : 2y – 3 = 0

- $d(P,\pi_1) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|} = \left|\frac{2\cdot 3+1\cdot 1-(-2)+1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$
- $d(P,\pi_2) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|} = \left|\frac{2\cdot 1-3}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}\right| = \frac{1}{2}$

4. Hallar la ecuación de un plano π paralelo al plano π': 2x – 2y + z + 6 = 0 y que diste 5 unidades del origen.

Al ser paralelo a π' , su ecuación es de la forma: 2x – 2y + z + k = 0

Para determinar k imponemos que la distancia al origen sea 5:

$$d(O,\pi) = \left|\frac{k}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}\right| = \left|\frac{k}{3}\right| = 5 \rightarrow |k| = 15 \rightarrow k = \pm 15$$

Hay dos planos: π_1: 2x – 2y + z – 15 = 0 ; π_2 : 2x – 2y + z + 15 = 0

<u>Observaciones:</u>

1) Con esta fórmula también se puede hallar la ***distancia entre dos planos paralelos***: basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de los dos planos y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, al otro plano.

2) Análogamente, la fórmula obtenida también da cuenta de la ***distancia recta-plano***: en este caso habría que escoger un punto arbitrario de r y averiguar su distancia al plano.

Ejemplos

1. Calcular la distancia entre los planos:

$$\pi_1: 2x+y-2z+1=0 \qquad \pi_2: 4x+2y-4z+3=0$$

Ambos planos son paralelos ya que $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{1}{3}$

Tomamos un punto del plano π_1 : P(0,-1,0)

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|-2+3|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$$

2. Calcular la distancia entre la recta y el plano:

$$\pi: 2x-3y+z+15=0 \qquad r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}$$

Sea el vector normal del plano, $\vec{n}$ (2,-3,1), y el vector de dirección de la recta, $\vec{u}$ (2,1,-1)

a) Si son secantes o la recta está contenida en el plano $\rightarrow d(r,\pi)=0$

b) Si son paralelos $\rightarrow d(r,\pi)=d(P,\pi)$ siendo $P\in r$

La recta y el plano son paralelos $\rightarrow \begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u} \ \rightarrow\ \vec{n}\cdot\vec{u}=4-3-1=0\\ P(1,0,-3)\in r \ \rightarrow\ 2-3+15\neq 0\ \rightarrow\ P\notin\pi\end{cases}$

Por tanto, la distancia es: $d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|2-3+15|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

2.3. Distancia de un punto a una recta

1ª FORMA:

Dado un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y una recta r determinada por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector de dirección $\vec{u_r}(u_1,u_2,u_3)$.

La **distancia del punto P a la recta r** es la distancia entre los puntos P y P´, siendo P´ la proyección de P sobre la recta r.

Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r, para ello realizamos los siguientes pasos:

a) Determinar la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto:

Como $r\perp\pi \rightarrow \vec{u_r}\parallel\vec{n_\pi}$, siendo $\vec{n_\pi}$ vector normal al plano: $\vec{n_\pi}=(u_1,u_2,u_3)$

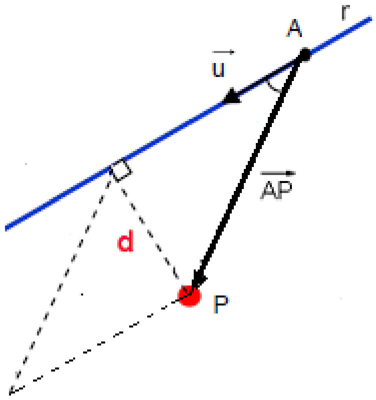
b) Calcular el punto de intersección de la recta r y el plano π : P´

2ª FORMA:

Dado un punto $P(x_1,y_1,z_1)$ y una recta r determinada por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector de dirección $\vec{u_r}(u_1,u_2,u_3)$. La distancia entre el punto y la recta viene dada por la fórmula:

$$d=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Demostración:



El área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{AP}$ y $\vec{u}$ se puede definir de dos formas:

- Área = $|\vec{u}| \cdot d$
- Área = $|\vec{AP} \times \vec{u}|$

Igualando las dos áreas, se obtiene: $|\vec{AP} \times \vec{u}| = |\vec{u}| \cdot d \rightarrow d = \dfrac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

La distancia del punto a la recta es independiente del punto de la recta que se tome y del vector de dirección.

Ejemplos

1. Calcular la distancia entre del punto P(1,-2, 3) a la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$

Sea $\vec{u_r}$ (2, 1, -1) vector de dirección.

a) Determinamos la ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por el punto P:

$\vec{n_\pi} = \vec{u_r} = (2,1,-1) \rightarrow \pi : 2(x-1) + y + 2 - (z-3) = 0 \rightarrow \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

b) Determinamos el punto de corte de la recta y el plano:

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π:

$2(1+2\lambda) + (-2+\lambda) + \lambda + 3 = 0 \rightarrow 6\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$ Sustituyendo en r: Q = $\left(-1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

c) d(P, r) = d(P,Q) = $|\vec{PQ}| = \left|\left(-1, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)\right| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{25}{4}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

2. Calcular la distancia entre del punto P(1,-2, 3) a la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$

Sea A(1,-2,0) un punto de r y $\vec{u_r}$ (2, 1, -1) vector de dirección.

$\vec{AP} = (0, 0, 3) \rightarrow \vec{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,6,0) \rightarrow |\vec{AP} \times \vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45}$

$d(P,r) = \dfrac{|\vec{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{15}{2}} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

Observación:

Con esta fórmula también se puede hallar la **distancia entre dos rectas paralelas,** basta con obtener un punto cualquiera de cualquiera de las dos rectas y hallar su distancia, mediante la fórmula anterior, a la otra recta:

Sean r y s dos rectas paralelas: $r = P + <\vec{u}>$, $s = Q + <\vec{v}>$

$$d(r,s) = d(P, s) = d(Q, r)$$

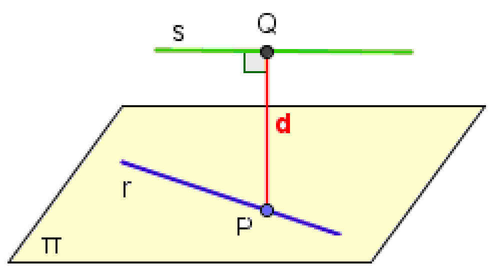
2.4. Distancia entre dos rectas que se cruzan.

Sean r y s dos rectas: $r = P + <\vec{u}>$, $s = Q + <\vec{v}>$

1ª FORMA:

Si se cruzan la distancia es la distancia de cualquier punto Q de s al plano paralelo a la recta s que contiene a r, es decir, al plano determinado por el punto P de r y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para determinar la distancia procedemos de la siguiente forma:



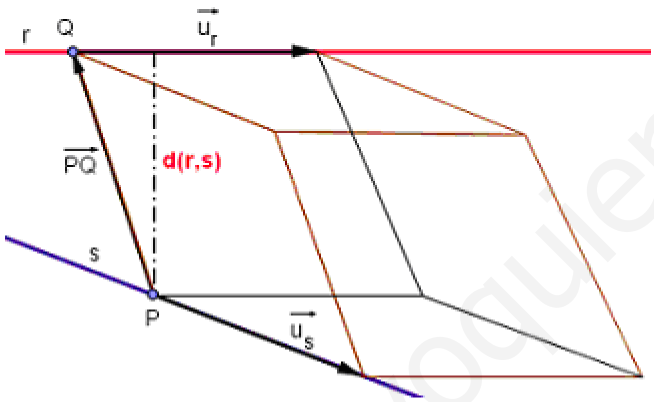
1) Determinamos el plano π que contiene a una de las rectas, r, y es paralelo a la otra, s:

$$\pi = P + <\vec{u}> + <\vec{v}>$$

2) La distancia entre ambas rectas es la distancia de un punto de la recta s paralela al plano

$$d(r, s) = d(Q, \pi),\ Q \in s$$

2ª FORMA: La distancia entre las rectas coincide con la altura del paralelepípedo.



Volumen = Área base x Altura

$$\left|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{PQ}]\right| = |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| \cdot d(r,s)$$

Por tanto: $d(r,s) = \dfrac{\left|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{PQ}]\right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$

NOTA: El vector $\vec{PQ}$ no debe simplificarse.

Ejemplos

1. Calcular la distancia entre las rectas r y s que se cruzan:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \qquad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

Sea $\vec{u}_r$ (2, 3, 2) vector director de r y P(-1, 1, 0) un punto de r.

Sea $\vec{v}_s$ (2, 1, -1) vector director de s y Q(1, 0,-2) un punto de s.

1ª forma: Mediante la fórmula

$$\left|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{PQ}]\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{matrix}\right\| = |-8| = 8 \qquad |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right| = |(-5,6,-4)| = \sqrt{25+36+16} = \sqrt{77}$$

Luego $d(r,s) = \dfrac{\left|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{PQ}]\right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \dfrac{8}{\sqrt{77}}$

2ª forma: Calculamos el plano que contiene a r y es paralelo a s:

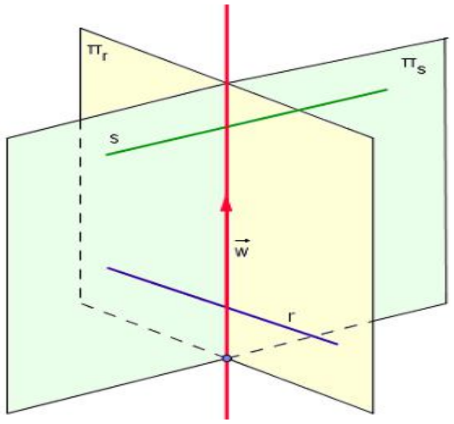
$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5(x+1) - 6(y-1) + 4z = 0 \rightarrow \pi: 5x - 6y + 4z + 11 = 0$$

Calculamos la distancia del punto Q(1, 0, -2) al plano π : $d(Q, \pi) = \dfrac{5-8+11}{\sqrt{5^2+6^2+4^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{77}}$

3 PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS

La **perpendicular común** a dos rectas no paralelas es la recta que corta ortogonalmente a cada una de ellas.

1ª FORMA:



Los pasos a seguir son:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Calcular $\vec{w}$ vector perpendicular a los vectores de dirección de r y s.

c) Determinar el plano que contiene a r y a $\vec{w}$

d) Determinar el plano que contiene a s y a $\vec{w}$

e) La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los dos planos anteriores

Ejemplo

Determina la recta perpendicular común a las rectas que se cruzan:

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

1º.- Hallar $\vec{w}$ vector perpendicular a los vectores de dirección de r y s.

$$\vec{u_r} \times \vec{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6,12,0) \rightarrow \vec{w}\,(1,2,0)$$

3º.- Plano π_r que contiene a r y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6(x-1) + 3y - 5(z+1) = 0 \rightarrow \pi_r : 6x - 3y + 5z - 1 = 0$$

4º.- Plano π_s que contiene a s y $\vec{w}$:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -6x + 3(y-2) + 5(z-2) = 0 \rightarrow \pi_r : 6x - 3y - 5z + 16 = 0$$

5º.- La perpendicular común es: $\begin{cases} 6x - 3y + 5z - 1 = 0 \\ 6x - 3y - 5z + 16 = 0 \end{cases}$

2ª FORMA:

Determinando un vector ortogonal a los vectores directores de r y s:

a) Tomamos un punto genérico, P_r, de r y otro, P_s, de s (tendrá por coordenadas las correspondientes a las ecuaciones paramétricas de la recta r y s, respectivamente).

b) Imponemos que el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ sea ortogonal a r y a s. Se obtiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas λ y μ que permiten conocer los puntos y luego su distancia.

c) Estos dos puntos determinan la ecuación de la perpendicular común.

Ejemplo

Determina la recta perpendicular común a las rectas y la distancia entre ellas:

$$r: x = y = z \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

- Calculamos un punto genérico de r y s:

  $P_r = (\lambda, \lambda, \lambda)$ punto genérico de r

  $P_s = (1+\mu, 2+2\mu, 2\mu)$ punto genérico de s

  $\rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)$

- Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}$ sea ortogonal a r y a s

  $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_r} \rightarrow (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)\cdot(1,1,1) = 0 \rightarrow -3\lambda+5\mu+3=0$

  $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_s} \rightarrow (1+\mu-\lambda, 2+2\mu-\lambda, 2\mu-\lambda)\cdot(1,2,2) = 0 \rightarrow -5\lambda+9\mu+5=0$

- Resolvemos el sistema:

  $$\begin{cases} -3\lambda+5\mu+3=0 \\ -5\lambda+9\mu+5=0 \end{cases} \rightarrow \mu = 0\,;\,\lambda = 1$$

  Sustituyendo estos dos valores obtenemos dos puntos:

  - Si $\lambda = 1 \rightarrow P_r = (1,1,1)$
  - Si $\mu = 0 \rightarrow P_s = (1,2,0)$

- La perpendicular común es la recta $P_r + < \overrightarrow{P_rP_s} >$

  $$\overrightarrow{P_rP_s}(0,1,-1) \rightarrow \text{Recta: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$$

- La distancia entre las dos rectas es igual a la distancia entre los puntos $P_r = (1,1,1)$ y $P_s = (1,2,0)$:

  $$d(r,s) = d(P_r, P_s) = \left|\overrightarrow{P_rP_s}\right| = \sqrt{2}$$

EJERCICIOS

1. Problema de ángulos

1.1. Halla el ángulo entre las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3-5t \\ y = 2+3t \\ z = -1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$$

1.2. Calcula el ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $\pi \equiv x+3y-z+1=0$

1.3. Calcula el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv z = 3 \qquad \pi_2 \equiv x-y+2z+4=0$$

1.4. Halla el ángulo que forman las rectas r y s. Comprueba previamente que las rectas se cortan:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = 4+3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = 5-\alpha \\ y = 4+5\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ b) $r \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ y+z=15 \end{cases}$; $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-15}{5}$

1.5. Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90º:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases} \; ; \; s \equiv \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = m\alpha \end{cases}$$

1.6. Halla los tres ángulos de un triángulo cuyos vértices son A(0, 0, 0), B(1, 2, 1) y C(3, 1, 1)

1.7. Halla el ángulo que forma el plano $\pi \equiv x-2y+z=0$ con cada uno de los ejes de coordenadas.

1.8. a) Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\beta \equiv 2x-y+3z+1=0$.

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y β

1.9. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z-4=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+2y+3z-1=0$, halla la ecuación de una recta situada en el plano π, que pase por el punto P(2, 1, -1) y sea perpendicular a r.

1.10. Dada la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\pi \equiv x+3y-3z+3=0$, halla la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

1.11. Determina la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=z+4 \\ x+2y=7 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$$

1.12. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2,1) y corta perpendicularmente a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$$

2. Problema de distancias

2.1. Considera la recta r y el plano π siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = -3 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$$

a) Halla las coordenadas del punto S donde se cortan r y π.

b) Calcula la distancia del punto P(4, 0, 1) al punto S.

2.2. Tenemos la recta r y los planos π y β siguientes:

$$\pi \equiv x + 2y - z = 1 \qquad \beta \equiv x - y + z = 3 \qquad r \equiv \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$$

a) Halla el punto P donde se cortan la recta r y el plano π.

b) Halla el punto Q donde se cortan la recta r y el plano β

c) Determina la distancia entre los puntos P y Q.

2.3. Halla la distancia del punto P(8, 5, -6) al plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 3 = 0$

2.4. Halla la distancia del punto P(5, 6, 6) a la recta $r \equiv (5\lambda, 2 - \lambda, \lambda)$ mediante dos procedimientos distintos.

2.5. Halla la distancia que hay entre el punto P(2, 2, -11) y la recta $r \equiv \frac{x-9}{12} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-6}{5}$ siguiendo los siguientes pasos:

a) Halla un plano π, perpendicular a r que contenga a P.

b) Obtén el punto Q, intersección del plano y la recta r.

c) Determina la distancia entre P y Q.

2.6. Halla la distancia que hay entre el punto P(3, 1, 6) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ siguiendo los siguientes pasos:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.

b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector director de r.

c) Divide dicha área entre el módulo del vector director de r.

2.7. Calcula la distancia entre el punto Q(2, -1, 0) y el plano que contiene a P(2, 0, 4) y a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

2.8. Calcula la distancia entre las rectas en cada caso:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$

b) $r \equiv \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \qquad r \equiv \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-5}$

2.9. Calcula la distancia entre los planos:

a) $\pi \equiv x - 2y + 3 = 0$; $\pi' \equiv 2x - 4y + 1 = 0$

b) $\pi \equiv 3x - 2y + z - 2 = 0$; $\pi' \equiv 2x - y + z = -5$

2.10. Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:

a) $r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{7}$ $\quad \pi \equiv 3x - 4y - 3 = 0$ b) $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 7x - 2y - z + 1 = 0$

2.11. Calcular el punto simétrico del punto P(1, 2, 3) respecto:

a) Del plano $\pi \equiv x - 3y - 2z + 4 = 0$ b) Respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$

2.12. Calcular el área del triángulo de vértices A(1, 3, 5), B(2, 5, 8) y C(5, 1, -1)

2.13. Halla el punto P de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0$ y $\pi' \equiv (-3 + \lambda, -\lambda + \mu, -6 + \mu)$

2.14. Determina la ecuación del plano paralelo a $\pi \equiv x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

2.15. Halla el punto de $r \equiv x = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$ cuya distancia al punto P(1, 0, 2) sea $\sqrt{11}$

2.16. Calcula un punto R de la recta $r \equiv x - 5 = y + 1 = \frac{z+2}{-2}$ que equidiste de los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1,1).

2.17. Un tetraedro tiene por vértices A(2, 1, 0), B(3, 4, 0) y C(5, 1, 0). El cuarto vértice, D, está sobre la recta: $r \equiv \frac{x-1}{-1} = y - 2 = z - 3$. Halla las coordenadas de D para que el volumen del tetraedro sea 6 u^3.

2.18. Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(2, -1, 1) y corta perpendicularmente a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

2.18. Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro lado sobre la recta

$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$:

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es el O(0, 0, 0), ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

2.19. Calcular el punto más cercano al punto P(1,3,0) de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto Q(-2,2,1) y el vector $\vec{v}$ (1,1,1). Calcular la distancia del punto P a la recta.

2.20. Dada la recta $r \equiv \frac{x+4}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el punto P(2,0,-1), se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) Hallar las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de la recta r.

2.19. Calcular el punto más cercano al punto P(1,3,0) de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto Q(-2,2,1) y el vector $\vec{v}$ (1,1,1). Calcular la distancia del punto P a la recta.

SOLUCIÓN:

Determinamos el plano perpendicular a r que pasa por P:

Como $r \perp \pi$ → vector director de la recta = vector normal del plano: $\vec{n} \equiv \vec{v}$ = (1,1,1).

(x + 2) + y – 2 + z – 1 = 0 → $\pi \equiv x + y + z - 4 = 0$

Calculamos M = $r \cap \pi$, sustituyendo los valores de r en el plano

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow -2 + t + 2 + t + 1 + t - 4 = 0 \rightarrow 3t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow M(-1, 3, 2)$$

D(P, r) = d(P,M) = $\sqrt{(1+1)^2 + (3-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$ u

2.20. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y el punto P(2,0,-1), se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) Hallar las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de la recta r.

SOLUCIÓN:

a) Calculamos el plano perpendicular a r y que pasa por P

Vector director de r: $\vec{u}$ = (-2, 1, 3) = vector normal del plano $\vec{n}$ =(-2, 1, 3)

-2(x – 2) + y + 3(z + 1) = 0 → $\pi \equiv 2x - y - 3z - 7 = 0$

Calculamos el punto Q intersección entre el plano y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \rightarrow 2(-4 - 2t) - (2 + t) - 3(-1 + 3t) - 7 = 0 \rightarrow -14t - 14 = 0 \rightarrow t = -1 \rightarrow Q(-2, 1, -4)$$

D(P, r) = d(P,Q) = $\sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{PQ}$ = (-4, 1, -3)

b) El punto Q es el punto medio de PP´ → (-2, 1,- 4) = $\left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z-1}{2}\right)$ → P´(-6, 2, -7)