

8

Límites de sucesiones y de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Saber estudiar la monotonía de una sucesión y determinar sus cotas si las tuviera.

B. Conocer y aplicar correctamente los métodos para resolver las indeterminaciones que surgen en las sucesiones.

C. Clasificar correctamente las sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes.

D. Obtener los límites laterales de una función en un punto y determinar la existencia o no existencia del límite.

E. Demostrar en casos sencillos, mediante la definición métrica de límite, que el límite hallado por métodos algebraicos verifica la definición.

F. Resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ utilizando métodos algebraicos.

H. Resolver indeterminaciones por infinitésimos equivalentes.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

- Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n+87}{n+1}$ es monótona y está acotada. Determina la menor de las cotas superiores y la mayor de las inferiores.
- Estudia la monotonía y las cotas de la sucesión $a_n = \frac{n^2}{2n-1}$.
¿A partir de qué término los siguientes son mayores que $k = 2000000$?

- Calcula los límites de las sucesiones racionales:
a) $a_n = \frac{(2n-5) \cdot (7-3n)}{3-2n+n^2}$ b) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{7-3n}{3-2n}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1+2n}{5+n^2}$
- Calcula los siguientes límites de sucesiones:
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n})$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n}{2n-1} \right)^{5n+1}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2n}{2n-1} \right)^{5n+1}$

- Demuestra que la sucesión $a_n = \frac{2n+7}{n+1}$ converge y que su límite es 2.
¿A partir de qué término de la sucesión se verifica que $|a_n - 2| < 0,000001$?
- Determina si la sucesión $a_n = \frac{n^2+n}{2n-1} - \frac{n^2+5}{2n+1}$ es convergente o divergente y calcula, en su caso, su límite.

- Calcula los límites laterales en $x = 1$ de las siguientes funciones y decide si existe o no su límite en ese punto.
a) $f(x) = \begin{cases} 3x-8 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $g(x) = 2 + \frac{x^2-1}{|x-1|}$ c) $h(x) = e^{\frac{3}{1-x}}$
- ¿Para qué valores del parámetro k existe el límite en $x = 2$ de la función $f(x) = \begin{cases} 3k^2x - 5k^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2kx + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$? Calcula su límite en esos casos.

- Aplica la definición métrica de límite para demostrar que:
a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 5) = 11$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 8$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{1-x} = +\infty$
En el apartado b) determina el radio δ del entorno $E(2, \delta)$ que verifica la definición de límite para un $\varepsilon = 0,02$.

- Calcula los siguientes límites:
a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{4}{x-2}}$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$

- Calcula los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes adecuados.
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^3 - 8}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x - 1}$

Soluciones

1. $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+87}{(n+1)+1} - \frac{2n+87}{n+1} = \frac{-85}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ es monótona decreciente.

La menor de las cotas superiores es $a_1 = \frac{89}{2}$ y la mayor de las inferiores es 2, su límite, ya que

$$\frac{2n+87}{n+1} - 2 = \frac{85}{n+1} > 0 \forall n \in \mathbf{N}.$$

2. $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{2(n+1)-1} - \frac{n^2}{2n-1} = \frac{2n^2-1}{4n^2-1} > 0 \forall n \in \mathbf{N}$

Es monótona creciente.

Cota inferior $a_1 = 1$. No está acotada superiormente. Para hallar a partir de qué término $a_n > 2000000$ se resuelve la inecuación:

$$\frac{n^2}{2n-1} > 2000000 \Leftrightarrow n^2 - 4 \cdot 10^6 n + 2 \cdot 10^6 > 0 \text{ y eso}$$

ocurre $\forall n > 3999999,5$, es decir, a partir del término $a_{4.000.000}$.

3. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-5)(7-3n)}{3-2n+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 - \frac{5}{n}\right) \left(\frac{7}{n} - 3\right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n} + 1\right)} =$
 $= \frac{2 \cdot (-3)}{1} = -6.$

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7-3n}{3-2n}\right) = \frac{3}{2}$ los términos de la sucesión $(-1)^n \cdot \frac{7-3n}{3-2n}$ se acercarán alternativamente a $-\frac{3}{2}$ y a $\frac{3}{2}$, por lo que no tiene límite y es oscilante.

c) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n}{5+n^2} = 0$ y
 $-\frac{1+2n}{5+n^2} \leq (-1)^n \cdot \frac{1+2n}{5+n^2} \leq \frac{1+2n}{5+n^2}$ entonces
 $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1+2n}{5+n^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1+2n}{5+n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n}{5+n^2} = 0$
 y el límite buscado es 0. Converge a 0.

4. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 4n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{n + \sqrt{n^2 + 4n}} = \frac{-4}{1+1} = -2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4} \cdot \frac{4}{2n-1} \cdot (5n+1)} = e^{\frac{5}{4}}$

5. $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+7}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{5}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$
 Si $\varepsilon = 0,000001 \Rightarrow n > 4999999$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{2n-1} - \frac{n^2+5}{2n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 9n + 5}{4n^2 - 1} = 1$, luego es convergente.

7. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 8) = -5$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax) = 1 + a$$

Por tanto, el límite existe $\Leftrightarrow a = -6$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 + \frac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - (x+1)) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 + \frac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + (x+1)) = 4.$$
 No tiene límite.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{-\infty} = 0$

No tiene límite.

8. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3k^2x - 5k^2) = k^2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k.$$

Para que exista el límite, $k^2 = 5 - 4k \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{cases}$

En el primer caso el límite es 1 y en el otro 25.

9. a) $|(2x+5)-11| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

b) $\left|\frac{2x^2-8}{x-2} - 8\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2(x-2)^2}{x-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$

Si $\varepsilon = 0,02 \Rightarrow \delta = 0,01$

c) $\frac{3}{1-x} > k \Leftrightarrow 1-x < \frac{3}{k} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{3}{k} = \delta$

10. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 4x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3 + x^2 + 2x)}{(x-2)(x+1)} = \frac{16}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} - 1\right) \left(\frac{4}{x-2}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-4}{2x}\right)} = e^{-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3(x+3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$

11. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{tg } 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3-8} = \frac{1}{12}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0$