5 Planos y rectas en el espacio

Propuesta A

1. En cada uno de los siguientes casos calcula las coordenadas del vector libre, sabiendo que uno de sus representantes fijos tiene como origen el punto *A* y por extremo el punto *B*.

a) $A(2, 3, -1)$ y $B(4, 5, 2)$ b) $A(-1, 2, 0)$ y $B(4, -3, -2)$

2. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos $A(2, 3, -2)$ y $B(-4, 3, -2)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta *r* que cumple:

a) Pasa por el punto $A(-1, 3, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (-3, -2, 4)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, 4)$ y $B(-3, 4, -7)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y su dirección es perpendicular a la de los vectores $\vec{u} = (-1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (0, -2, 5)$.

4. Dado el segmento de extremos $A(1, 2, -3)$ y $B(-4, 12, 2)$, calcula las coordenadas de un punto interior a dicho segmento de manera que la distancia que lo separa de *A* sea $\frac{2}{5}$ de la longitud del segmento *AB*.

5. Se considera la recta de ecuación implícita $r: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Determina:

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(4, 0, -1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (0, -2, 3)$ y $\vec{v} = (5, -1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(3, -2, 1)$, $B(0, 0, -2)$ y $C(1, 1, 1)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y contiene a la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{x+3}{-1}$.

7. Decide en cada uno de los siguientes casos si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados o forman un triángulo:

a) $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 4, -3)$ y $C(3, 2, 1)$ b) $A(1, 2, -2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(0, 4, -4)$

8. Calcula la ecuación del plano simétrico de $\pi: x - 11y + 2z + 3 = 0$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Calcula *m* para que $A(-1, m - 1, 0)$, $B(0, m + 2, 1)$ y $C(1, 5, 2)$ pertenezcan a una recta. ¿Cuál es su ecuación?

10. Tres aristas concurrentes en el vértice $A(2, 0, 0)$ de un paralelepípedo son *AB*, *AC* y *AD*. Sabiendo que $B(5, 0, 1)$, $C(3, 1, -3)$ y $D(1, 10, 3)$, determina:

a) Los otros cuatro vértices. b) El volumen del paralelepípedo. c) Comprueba que es un ortoedro.

11. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: ax - y + z = 0$
$\pi_2: x + ay = 0$
$\pi_3: 2x + az = 0$

Propuesta B

1. a) Del vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 3, -1)$ se sabe que $P(-1, 2, 3)$. Calcula las coordenadas del extremo Q.

b) Del vector $\overrightarrow{RS} = (-1, 3, -2)$ se sabe que $S(-2, 8, -1)$. Calcula las coordenadas del origen R.

2. El punto $M(-6, 5, 1)$ es el punto medio del segmento AB. Halla el punto A si el punto B es $(10, -7, 0)$.

3. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta r que cumple:

a) Pasa por el punto $A(6, -1, -2)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, 1, 0)$.

b) Pasa por los puntos $A(5, 2, -1)$ y $B(5, 4, -1)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y es paralela a la recta $s: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-5}{1}$.

4. Dado el segmento de extremos $A(-3, 4, 4)$ y $B(1, 12, 0)$, calcula las coordenadas de tres puntos P, Q y R que dividan al segmento en cuatro partes iguales.

5. Se define la recta r como intersección de los planos $\pi: 2x - 3y + z = 3$ y $\sigma: x - z = 6$. Determina de r:

a) Un punto y el vector director. b) La ecuación en forma paramétrica. c) La ecuación en forma continua.

6. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que cumple las siguientes condiciones:

a) Pasa por el punto $A(1, 2, -2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, -2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $A(-1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 3)$ y $C(-1, 2, 3)$.

c) Pasa por el punto $A(-3, 4, 0)$ y uno de sus vectores normales es $\vec{n} = (1, -2, -3)$.

7. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1, 1, 2)$ y contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = z$.

8. a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(2, 1, 3)$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

b) Halla la ecuación en forma paramétrica de la recta simétrica de $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -2 - t \end{cases}$ respecto de $P(-2, 1, 0)$.

9. Un cubo tiene un vértice en el punto $A(1, 1, 1)$ y el centro en el punto $C(2, 2, 2)$.
¿Cuál es su volumen?

10. Estudia la posición relativa de los planos:

$\pi_1: 3x - y + 2z = 1$
$\pi_2: x + 4y + z = b$
$\pi_3: 2x - 5y + az = -2$

Soluciones propuesta A

1. a) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, 5, 2) - (2, 3, -1) = (2, 2, 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (4, -3, -2) - (-1, 2, 0) = (5, -5, -2)$

2. $M\left(\frac{1}{2}(2-4),\ \frac{1}{2}(3+3),\ \frac{1}{2}(-2-2)\right) = M(-1, 3, -2)$

3. a) $\begin{cases} x = -1-3t \\ y = 3-2t \\ z = -2+4t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 2, -11)$.

$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 2+2t \\ z = 4-11t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-11}$

c) Un vector director es $\vec{u} \times \vec{v} = (4, 5, 2)$.

$\begin{cases} x = -3+4t \\ y = 4+5t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{p} = \frac{3}{5}(1, 2, -3) + \frac{2}{5}(-4, 12, 2) \Rightarrow P(-1, 6, -1)$

5. a) $A(0,1,3)$, $\vec{u} = (1,2,-1)\times(1,1,1) = (3,-2,-1)$

b) $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$

c) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

6. a) $\begin{cases} x = 4+5\mu \\ y = -2\lambda-\mu \\ z = -1+3\lambda+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 5 & x-4 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 15y + 10z + 14 = 0$

b) $\pi : \left(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$, donde $\overrightarrow{BA} = (3, -2, 3)$ y $\overrightarrow{BC} = (1, 1, 3)$

$\begin{cases} x = 3\lambda+\mu \\ y = -2\lambda+\mu \\ z = -2+3\lambda+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -2 & 1 & y \\ 3 & 3 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9x - 6y + 5z + 10 = 0$

c) $\vec{u} = (2,0,-1)$, $B(0, 1, -3) \in r$, $\overrightarrow{AB} = (3, -3, -3)$

$\pi\left(A; \vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) : \begin{cases} x = -3+2\lambda+3\mu \\ y = 4-3\mu \\ z = -\lambda-3\mu \end{cases}$

$\pi : x - y + 2z + 7 = 0$

7. a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 2)$

Como tienen igual dirección, los tres puntos están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, -2)$

Como tienen distinta dirección, los tres puntos no están alineados y forman un triángulo.

8. El plano simétrico será paralelo al plano dado y pasará por un punto simétrico de un punto cualquiera del plano dado, por ejemplo: $A(1, 0, -2) \in \pi$

$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}, \frac{z-2}{2}\right) = (-2, 1, 0) \Rightarrow A'(-5, 2, 2)$

$\pi' : x - 11y + 2z + D = 0 \Rightarrow -5 - 22 + 4 + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 23 \Rightarrow \pi' : x - 11y + 2z + 23 = 0$

9. $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 6-m, 2)$. Para que los tres puntos estén alineados:

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6-m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$

10. a) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CE} \Rightarrow (3, 0, 1) = (x-3, y-1, z+3) \Rightarrow$

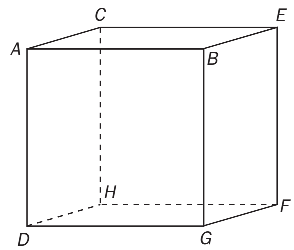
$\Rightarrow E(6, 1, -2)$

Análogamente se obtienen:

$G(4, 10, 4)$

$F(5, 11, 1)$

$H(2, 11, 0)$



b) $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 110\ \text{u}^3$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

11. $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1)$

Si $a = 0$, $\pi_2 \equiv \pi_3$ y π_1 los corta.

Si $a = \pm 1$, tienen una recta en común y no son paralelos ni coincidentes entre sí.

Si $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, tienen un punto en común que es el origen de coordenadas.

Soluciones propuesta B

1. a) $\vec{q} = \vec{p} + \overrightarrow{PQ} = (-1,\ 2,\ 3) + (5,\ 3, -1) =$

$= (4,\ 5,\ 2) \Rightarrow Q(4,\ 5,\ 2)$

b) $\vec{r} = \vec{s} - \overrightarrow{RS} = (-2,\ 8,\ -1) - (-1,\ 3, -2) =$

$= (-1,\ 5,\ 1) \Rightarrow R(-1,\ 5,\ 1)$

2. $$\begin{cases} x_M = -6 = \dfrac{x_A + 10}{2} \\ y_M = 5 = \dfrac{y_A - 7}{2} \\ z_M = 1 = \dfrac{z_A + 0}{2} \end{cases} \Rightarrow A(-22,\ 17,\ 2)$$

3. a) $$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{0}$$

b) Un vector director es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,\ 2,\ 0)$.

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-5}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$$

c) Un vector director es $\vec{u} = (2, -3,\ 1)$.

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{1}$$

4. $\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow$

$\vec{p} = \frac{3}{4}(-3,\ 4,\ 4) + \frac{1}{4}(1,\ 12,\ 0) = (-2,\ 6,\ 3)$

$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = (-1,\ 8,\ 2)$

$\vec{r} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = (0,\ 10,\ 1)$

Por tanto: $P(-2,\ 6,\ 3)$, $Q(-1,\ 8,\ 2)$, $R(0,\ 10,\ 1)$

5. a) $A(0, -3, -6)$, $\vec{u} = (2, -3, 1) \times (1, 0, -1) \sim (3, 3, 3)$

b) $$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -6 + \lambda \end{cases}$$

c) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+6}{1}$

6. a) $$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2 - 2\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ -2 & 1 & y-2 \\ 0 & 2 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x - 2y + 3z + 6 = 0$

b) $\pi : \left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, donde $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, -2,\ 4)$ y

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,\ 0,\ 4)$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + 4\lambda + 4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & x+1 \\ -2 & 0 & y-2 \\ 4 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$$

c) El plano pedido es de la forma:
$x - 2y - 3z + D = 0$, y como debe pasar por A,
$-11 + D = 0 \Rightarrow D = 11 \Rightarrow x - 2y - 3z + 11 = 0$

7. La recta r pasa por $A(1,\ 2,\ 0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)$. El plano pedido es el determinado por $\pi : \left(A;\ \vec{u},\ \overrightarrow{AP}\right)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & x-1 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

8. a) $\left(\dfrac{x+2}{2}, \dfrac{y+1}{2}, \dfrac{z+3}{2}\right) = (-2, 1,\ 0) \Rightarrow A'(-6,\ 1, -3)$

b) La recta será paralela a r y pasará por el punto simétrico de $B(1,\ 0,\ -2)$.

$\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y}{2}, \dfrac{z-2}{2}\right) = (-2, 1,\ 0) \Rightarrow B'(-5,\ 2,\ 2)$

$$r' : \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t \end{cases}$$

9. Se traslada el cubo según el vector $(-1,\ -1,\ -1)$, de modo que su vértice es ahora $A'(0,\ 0,\ 0)$ y su centro es $C'(1,\ 1,\ 1)$, mientras que su volumen no ha variado.

Hay infinitos cubos con vértice A' y centro C', pero todos tienen el mismo volumen. Se toma, por tanto, el cubo con las caras paralelas a los planos coordenados. Tres aristas del cubo quedan sobre los ejes coordenados.

La proyección del centro $C'(1,\ 1,\ 1)$ sobre cada uno de los ejes da los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), que son los puntos medios de las aristas del cubo. Por tanto, los puntos (2, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 2) son vértices del cubo, luego la arista del cubo mide 2 unidades.

El volumen del cubo es $V = 2^3 = 8\ u^3$.

10. $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13(a-1) \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(b-3)$$

Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto.

Si $a = 1$ y $b \neq 3$, los planos se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas.

Si $a = 1$ y $b = 3$, tienen una recta en común.