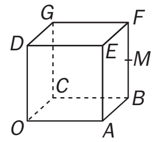
Vectores en el espacio

A. Expresar un vector como combinación lineal de otros vectores dados.

1. En el cubo de la figura, M es el punto medio de $\overrightarrow{BF}$.
Expresa los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FO}$ y $\overrightarrow{DM}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$.



2. El vector $\vec{a} = (-2,\ -11,\ 1)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{b} = (2, -3,\ 5)$ y $\vec{c} = (4, 1, k)$. ¿Cuál es el valor de k?

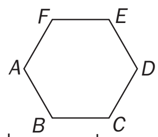
B. Determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores.

3. Sabiendo que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, justifica que los vectores $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{w} - \vec{u}$ son linealmente dependientes y que los vectores $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ y $\vec{w} + \vec{u}$ son linealmente independientes.

4. ¿Para qué valores del parámetro k los vectores $(1, k, 1)$, $(k, 1, 1)$ y $(1, 1, k)$ son linealmente dependientes?

C. Multiplicar escalarmente dos vectores tanto en la forma geométrica como en la analítica.

5. El lado del hexágono regular de la figura mide $\sqrt{3}$. Calcula los productos escalares $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CF}$.



6. Si $\vec{x} \cdot \vec{x} = 2$, $\vec{x} \cdot \vec{y} = -1$ y $\vec{y} \cdot \vec{y} = 3$, y se tienen los vectores $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{b} = 3\vec{x} - \vec{y}$, calcula: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $|\vec{b}|$ y el coseno del ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

D. Determinar condiciones de ortogonalidad de dos vectores dependientes de un parámetro.

7. Halla dos vectores ortogonales a $\vec{x} = (-1, -2, 4)$ y a $\vec{y} = (1, 1, -2)$ de módulo $\sqrt{20}$.

8. Se consideran los vectores $\vec{u} = (-2k, k, 5)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Calcula el valor del parámetro k para que los vectores $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

E. Saber hallar el ángulo de dos vectores y determinar vectores ortogonales a uno dado.

9. Halla tres vectores unitarios, ortogonales al vector $\vec{a} = (-3, 5, 1)$, de modo que los tres tengan distinta dirección. Comprueba que son linealmente dependientes.

10. Dados los vectores $\vec{a} = (-3, 5, 1)$, $\vec{b} = (2, -3, 5)$ y $\vec{c} = (4, 1, 1)$, calcula el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores: $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{c}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{c} - \vec{a}$

F. Calcular correctamente productos vectoriales y productos mixtos con unos vectores conocidos.

11. Dados los vectores $\vec{x} = (-4, 3, 0)$, $\vec{y} = (1, -3, 3)$, $\vec{z} = (5, -2, -1)$, halla:
a) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ b) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ c) $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ d) $|(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}|$ e) $|\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})|$

12. Demuestra que $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \times (-2\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$.

13. El producto mixto de los vectores $\vec{x} = (-1, 0, 3)$, $\vec{y} = (-2, -3, 1)$, y $\vec{z} = (k, 2, -1)$ es 2009. ¿Cuál es el valor de k?

G. Aplicar el producto vectorial para determinar una dirección ortogonal al plano vectorial V^2 determinado por dos vectores.

14. Con los vectores $\vec{u} = (1, 1, -2)$ y $\vec{v} = (2, -1, 0)$ se determina un espacio vectorial de dimensión 2 (plano vectorial V^2). Calcula un vector $\vec{w}$ que sea base de un espacio vectorial de dimensión 1 (recta vectorial V^1) de manera que los espacios V^2 y V^1 sean ortogonales.
Demuestra que el vector $\vec{w}$ hallado es ortogonal a todos los vectores $\vec{x} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $(\lambda, \mu \in R)$.

15. Sean $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -4, 3)$, y $\vec{w} = (10, 7, 6)$. V^2 es el espacio vectorial de base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. V^1 es el espacio vectorial de base $\{\vec{w}\}$. Comprueba que todos los vectores de V^2 son ortogonales a los de V^1.
Demuestra que los espacios vectoriales $V^2 = \{\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}$ y $V^1 = \{\vec{y} = \lambda\vec{w}\}$ son ortogonales.

Soluciones

1. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{a}=2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BO}=-\vec{d}-\vec{b}$

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{d})=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}$

2. $x\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-11\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+4y=-2\\-3x+y=-11\\5x+ky=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\\k=7\end{cases}$

3. a) $1(\vec{u}-\vec{v})+1(\vec{v}-\vec{w})+1(\vec{w}-\vec{u})=\vec{0}$, luego los vectores son linealmente dependientes.

b) Si $\alpha(\vec{u}-\vec{v})+\beta(\vec{v}-\vec{w})+\gamma(\vec{w}+\vec{u})=\vec{0}\Rightarrow$

$(\alpha+\gamma)\vec{u}+(\beta-\alpha)\vec{v}+(\gamma-\beta)\vec{w}=\vec{0}$. Como $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, se tiene que

$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\\beta-\alpha=0\\\gamma-\beta=0\end{cases}$, cuya única solución es la trivial, $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$; luego los tres vectores pedidos son linealmente independientes.

4. $\begin{vmatrix}1&k&1\\k&1&1\\1&1&k\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3k-k^3-2=0\Leftrightarrow-(k-1)^2(k+2)=0$

Se anula si $k=1$ o $k=-2$. Para estos valores de k, los vectores son linealmente dependientes.

5. La longitud de la diagonal AC es igual al doble de la apotema, es decir, $2\cdot\frac{3}{2}=3$ y la longitud de la diagonal EB es el doble del lado, $2\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 30^\circ=\frac{9}{2}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 120^\circ=-\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 120^\circ=-6$

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=3(\vec{x}\cdot\vec{x})+5(\vec{x}\cdot\vec{y})-2(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=3\cdot 2+5\cdot(-1)-2\cdot 3=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{x}+2\vec{y})\cdot(\vec{x}+2\vec{y})=(\vec{x}\cdot\vec{x})+4(\vec{x}\cdot\vec{y})+4(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=2+4\cdot(-1)+4\cdot 3=10$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=(3\vec{x}-\vec{y})\cdot(3\vec{x}-\vec{y})=9(\vec{x}\cdot\vec{x})-6(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{y})=$

$=9\cdot 2-6\cdot(-1)+3=27\Rightarrow|\vec{b}|=+\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{27}}=-\frac{\sqrt{30}}{18}$

7. $\vec{x}\times\vec{y}=(0,2,1)$ Se normaliza y se multiplica por el módulo deseado.

$\pm\frac{\vec{x}\times\vec{y}}{|\vec{x}\times\vec{y}|}\sqrt{20}=\pm\left(0,\frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}\right)=\pm\left(0,4,2\right)$

8. $\vec{u}+2\vec{v}=(-2k+2,k+2,3)$

$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{v}=0\Rightarrow-2k+2+k+2-3=0\Rightarrow k=1$

9. Se hallan tres vectores cualesquiera ortogonales al vector $\vec{a}$ y se normalizan. Por ejemplo:

$\vec{x}=(5,3,0)$, $\vec{y}=(1,0,3)$, $\vec{z}=(0,1,-5)$

$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\left(\frac{5}{\sqrt{34}},\frac{3}{\sqrt{34}},0\right)$, $\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)$ Basta comprobar que $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son linealmente dependientes: $\begin{vmatrix}5&3&0\\1&0&3\\0&1&-5\end{vmatrix}=-15+15=0$

10. $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{-16}{\sqrt{35}\sqrt{38}}\Rightarrow\alpha\approx 116^\circ 1'$

$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\,|\vec{c}|}=\frac{-6}{\sqrt{35}\sqrt{18}}\Rightarrow\beta\approx 103^\circ 50'$

$\cos\gamma=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\,|\vec{c}|}=\frac{10}{\sqrt{38}\sqrt{18}}\Rightarrow\gamma\approx 67^\circ 31'$

$\cos\phi=\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{c}-\vec{a}|\,|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{-15}{\sqrt{65}\sqrt{41}}\Rightarrow\phi\approx 106^\circ 54'$

11. $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=(6,\ 54,\ -78)$

$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=(39,\ 52,\ -91)$

$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}]=12$

$|(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}|=\sqrt{6^2+54^2+(-78)^2}=\sqrt{9036}$

$|\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})|=\sqrt{39^2+52^2+(-91)^2}=\sqrt{12506}$

12. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=(\vec{u}\times\vec{u})-(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{v}\times\vec{u})-(\vec{v}\times\vec{v})=$

$=\vec{0}-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{v})-\vec{0}=-2(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{u}\times(-2\vec{v})$

13. $\begin{vmatrix}-1&0&3\\-2&-3&1\\k&2&-1\end{vmatrix}=2009\Rightarrow 9k-13=2009\Rightarrow k=\frac{674}{3}$

14. $\vec{w}=\vec{v}\times\vec{u}=(2,\ 4,\ 3)$

$\vec{w}\cdot\vec{x}=\vec{w}\cdot(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda(\vec{w}\cdot\vec{u})+\mu(\vec{w}\cdot\vec{v})=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0$

luego es ortogonal a todos ellos.

15. Para comprobarlo se toma un vector cualquiera de V^2, por ejemplo $\vec{u}+2\vec{v}=(0,-6,7)$ y se multiplica escalarmente por otro vector de V^1, por ejemplo,

$-3\vec{w}=(-30,-21,-18)$.

$(0,\ -6,7)\cdot(-30,\ -21,\ -18)=0+126-126=0$

Para demostrarlo, se toma el caso general:

$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\alpha\vec{w}=\lambda\alpha(\vec{u}\cdot\vec{w})+\mu\alpha(\vec{v}\cdot\vec{w})=$

$=(\lambda\alpha)\cdot 0+(\mu\alpha)\cdot 0=0$