7 Lugares geométricos en el espacio

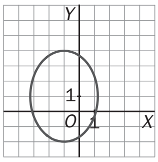
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Escribir las ecuaciones paramétricas de cualquier cónica en el plano.	**1.** Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de la circunferencia de centro $C(2, -3)$ y radio $r = 5$. Halla los puntos de la misma que se obtienen al tomar como valores del parámetro en las ecuaciones paramétricas $t = 0$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{3}$ **2.** Escribe las ecuaciones paramétricas e implícita de la elipse de focos $F(-1, -1)$ y $F'(-1, 3)$ y eje mayor $2a = 6$.
B. Expresar la ecuación de una cónica en forma implícita cuando se conoce su ecuación paramétrica, y viceversa.	**3.** Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t} \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$ corresponden a una parte de la cónica de ecuación $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+k^2} \\ y = 2k \end{cases}$. Escribe la ecuación inplícita de la cónica, identifica de qué cónica se trata y efectúa la representación gráfica correspondiente a la parte que definen las primeras ecuaciones paramétricas.
C. Calcular puntos y hallar la ecuación en forma implícita de curvas y superficies en el espacio, dadas mediante sus ecuaciones paramétricas.	**4.** Identifica la superficie que definen las ecuaciones paramétricas siguientes e indica un punto de cada una: $S_1: \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t + s \\ z = 3t - s \end{cases}$, $S_2: \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = -5 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - 4s \end{cases}$, $S_3: \begin{cases} x = 5\cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\ y = 5\cos\alpha\cos\beta \\ z = 3 + 5\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ **5.** Halla las ecuaciones implícitas de la curva $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t^2 \\ z = 2t \end{cases}$ y determina tres de sus puntos.
D. Determinar la ecuación de cuádricas sencillas (elipsoide, paraboloide, hiperboloide).	**6.** Determina los ejes y los vértices del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$. ¿Qué curva se obtiene al cortar el elipsoide por el plano $x = 0$? ¿Y si es cortado por el plano $z = 0$?
E. Hallar la ecuación de la superficie esférica conociendo: centro y radio, extremos de un diámetro, centro y recta o plano tangente, cuatro puntos no coplanarios.	**7.** Los puntos $A(7, -2, 5)$ y $B(-1, -4, 1)$ son los extremos de un diámetro de una superficie esférica. Escribe sus ecuaciones paramétricas e implícita. **8.** Una superficie esférica pasa por los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(0, 2, 0)$, $C(2, 0, 0)$ y $D(4, 4, 4)$. Calcula su ecuación implícita y determina su centro y su radio. **9.** Escribe la ecuación de la superficie esférica de centro $C(1, 0, -1)$ tangente a la recta $r: (1 + \lambda, 2\lambda, 5 - 2\lambda)$.
F. Identificar una superficie esférica, su centro y radio a partir su ecuación en cualquiera de sus formas.	**10.** Se considera la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$, determina: su centro, su radio, sus ecuaciones paramétricas y el volumen de la esfera que delimita.
G. Resolver problemas de incidencia, tangencia, intersección y posición relativa con superficies esféricas.	**11.** Dado el plano de ecuación $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$, y el punto $C(5, 0, 1)$, determina: a) La ecuación de la superficie esférica de centro C y tangente al plano. b) La ecuación de otro plano distinto y paralelo a π que también sea tangente a la superficie esférica.
H. Calcular las ecuaciones de superficies cónicas, cilíndricas, de traslación, de revolución y cuádricas en las coordenadas apropiadas en cada caso	**12.** Calcula las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtienen al girar la curva $C: \begin{cases} x = y^2 \\ y = z \end{cases}$, alrededor del eje Z.

1. $\begin{cases} x = 2 + 5\cos t \\ y = -3 + 5\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$

Puntos: $P_1(7, -3)$, $P_2\left(\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-6+5\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_3(-3, -3)$,

$P_4(2, -8)$ y $P_5\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-6-5\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Centro $C(-1, 1)$.

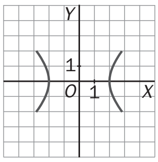


Semiejes: $a = 3$, $b = \sqrt{5}$.

Ec. implícita: $\dfrac{(x+1)^2}{5} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

Ecs. paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5}\,\text{sen}\,t \\ y = 1 + 3\cos t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 = 4 + 4k^2 \\ y^2 = 4k^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 + y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Se trata de una hipérbola equilátera centrada en el origen. Como $-1 \leq \text{sen}\,t \leq 1$ y $-1 \leq \cos t \leq 1$, resulta que $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ y que $-2 \leq y \leq 2$.



4. S_1 corresponde al plano de ecuación implícita $4x - 5y + 3z - 33 = 0$.

S_2 es una recta, ya que con el cambio $k = 5 - 2s$ se tiene S_2: $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -5 + k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$, es decir, $\begin{cases} x + y = -3 \\ 2x + z = 7 \end{cases}$.

S_3 es una superficie esférica de centro $C(0, 0, 3)$, radio 5 y ecuación implícita $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. Para hallar un punto de cada una, se igualan a 0 los parámetros: $P_1(2, -5, 0)$, $P_2(2, -5, 3)$ y $P_3(0, 5, 3)$.

5. Se despeja $t = x + 2$ y se sustituye:

$\begin{cases} y = (x+2)^2 \\ z = 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - y + 4 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases}$

Tomando $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$ se obtienen:

$A(-2, 0, 0)$, $B(-1, 1, 2)$ y $C(0, 4, 4)$.

6. $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{4^2} + \dfrac{z^2}{4} = 1$. Ejes: $2a = 8$, $2b = 8$, $2c = 4$.

Vértices: $A(4, 0, 0)$, $A'(-4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $B'(0, -4, 0)$, $C(0, 0, 2)$ y $C'(0, 0, -2)$.

Si $x = 0 \Rightarrow \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, elipse de ejes $2b = 8$, $2c = 4$.

Si $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$, circunferencia de radio 4.

7. Centro: $C\left(\dfrac{7-1}{2}, \dfrac{-2-4}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right) = (3, -3, 3)$

Radio: $r = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

Ecuación implícita: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 21$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{21}\cos\alpha\cos\beta \\ y = -3 + \sqrt{21}\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ z = 3 + \sqrt{21}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

8. $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$. Sustituyendo los puntos se obtiene:

$\begin{cases} 2C + D = -4 \\ 2B + D = -4 \\ 2A + D = -4 \\ 4A + 4B + 4C + D = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -22/5 \\ B = -22/5 \\ C = -22/5 \\ D = 24/5 \end{cases}$

$x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{22}{5}x - \dfrac{22}{5}y - \dfrac{2}{5}z + \dfrac{24}{5} = 0$.

Centro $M\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{11}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$, radio $r = \sqrt{3\left(\dfrac{11}{5}\right)^2 - \dfrac{24}{5}} = \dfrac{9}{5}\sqrt{3}$.

9. $R = d(C,r) = \dfrac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \dfrac{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}$

Ecuación: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 20$

10. Centro $C(2, -3, -1)$, radio 4, volumen $\dfrac{256}{3}\pi$.

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 4\cos\alpha\cos\beta \\ y = -3 + 4\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ z = -1 + 4\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

11. Radio $R = d(C, \pi) = \dfrac{|10 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 4$

a) $(x-5)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$

b) El plano buscado es

$d(C,\sigma) = R \Rightarrow \dfrac{|10-1+D|}{3} = 4 \Rightarrow |9 + D| = 12 \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 3 \\ D_2 = -21 \end{cases}$.

Luego $\sigma : 2x - 2y - z - 21 = 0$

12. La curva es $C : \{t^2, t, t\}$, luego las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución son:

$\begin{cases} x = t^2\cos s - t\,\text{sen}\,s \\ y = t^2\,\text{sen}\,s + t\cos s \\ z = t \end{cases}$