1 Matrices

Propuesta A

1. Un taller de aluminio fabrica tres modelos distintos de ventanas: A, B y C, en dos versiones distintas: grande y pequeña. El taller produce diariamente 100 ventanas grandes y 800 pequeñas de tipo A, 800 grandes y 600 pequeñas de tipo B, y 400 grandes y 600 pequeñas de tipo C. Cada ventana grande lleva 24 junquillos y 10 remaches, y cada ventana pequeña lleva 12 junquillos y 8 remaches, en cualquiera de los tres modelos.

a) Representa esta información en dos matrices.

b) Halla una matriz que represente la cantidad de junquillos y de remaches necesarios para la producción diaria de ventanas de dicha fábrica.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, realiza las siguientes operaciones:

AB, C^tA, $(BC-BA)^t$

3. Resuelve la ecuación matricial $AXB=C$, donde:
$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^n.

b) Calcula, si existe, A^{-1}.

c) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $A^n+BX=I$.

5. Escribe una matriz cuadrada de orden 4 cuyas dos primeras filas sean $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$, de manera que:

a) $\text{rg}(A)=2$

b) $\text{rg}(A)=3$

c) $\text{rg}(A)=4$

Justifica la respuesta.

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, determina los valores de m para los que existe A^{-1}.

Calcula A^{-1} para $m=0$.

7. Estudia según los valores de k el rango de la siguiente matriz:
$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix}$

Propuesta B

1. Efectúa la siguiente operación con matrices: $3A - AB + C^t$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, los siguientes productos: ABC , BCA y BAC

3. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $A^3 - 3A^2 + 3A$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Razona para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $(AB)^t X = I$ para $k = 0$, siendo I la matriz identidad.

5. Dados los siguientes vectores de $\mathbf{R}^4$:

$\vec{u} = (m, -1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, m, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 0, -1, 2)$,

calcula los valores de m para los que dichos vectores son linealmente independientes.

6. Obtén las matrices A y B que cumplen las siguientes condiciones:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

7. Determina, razonadamente, la matriz $A^{20} - A^{10}$ sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Halla la matriz inversa de la siguiente matriz por el método de Gauss-Jordan y comprueba el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones propuesta A

1. a) $\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} G & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ G \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} J & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{pmatrix} 100 & 800 \\ 800 & 600 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} J & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12\,000 & 7400 \\ 26\,400 & 12\,800 \\ 16\,800 & 8800 \end{pmatrix} \end{array}$

2. $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 13 \\ 3 & 0 & -9 \\ 9 & -4 & -23 \end{pmatrix}$

$C^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$

$(BC - BA)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -28 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -24 & 10 \\ 14 & -4 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 25 & -14 \\ -38 & 21 \end{pmatrix}$

3. $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 4 & 16 \\ -18 & -4 & 13 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se demuestra por inducción:

$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(n+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$A\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b = d = f = g = h = 0 \\ a = e = i = 1 \\ c = -2i = -2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^n + BX = I \Rightarrow X = B^{-1}\left(I - A^n\right)$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to mF_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & -m^2+4m-3 \end{pmatrix}$

$-m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1,\ m = 3$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow A$ tiene inversa.

Si $m = 0$:

$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} g = i = 0 = c;\ h = b = \dfrac{1}{3} \\ a = 1 \\ d = -4,\ e = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} & 0 \\ -4 & -\dfrac{4}{3} & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & k & 5 & 2 \\ 3 & k-4 & k+9 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & k+2 & k & k \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{pmatrix}$

$k = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que la tercera fila sería 0 y las dos primeras no serían proporcionales.

$k = -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, ya que en este caso las filas segunda y tercera serían proporcionales y no lo serían la primera y la segunda.

$k \neq 2$ y $k \neq -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Soluciones propuesta B

1.

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 7 & -2 & 3 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 14 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

2. $ABC = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 36 & -8 \end{pmatrix}$

$BCA = \begin{pmatrix} -20 & -52 & 84 \\ -6 & 6 & -18 \\ -19 & -17 & 15 \end{pmatrix}$

BAC no se puede realizar, ya que BA tiene dimensión 3×3 y C tiene dimensión 2×2.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) $B^t A^t = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Para que $B^t A^t$ tenga inversa es necesario que $\text{rg}(B^t A^t) = 2,$ para lo cual hace falta que sus filas no sean proporcionales; por tanto,

$\dfrac{2k-1}{3} \neq \dfrac{k}{k+2} \Rightarrow 2k^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$

b) $(AB)^t X = I \Rightarrow X = \left(B^t A^t\right)^{-1}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \quad b = 0 \\ c = \dfrac{3}{2}, \quad d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

5. $\text{rg}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{rg}\begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

$$\begin{pmatrix} m & -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - m \cdot F_1]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & m & -1 & 1 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + m \cdot F_2]{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & m & 1-2m \\ 0 & 0 & (m+1)(m-1) & (2m+1)(1-m) \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$.

Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes.

6.

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A + 4B = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \\ 6A - 9B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -18 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A = \dfrac{1}{2}\left(3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ldots,$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{20} - 2A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 20 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Aplicando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \to F_1 + 2F_3 \\ F_2 \to F_2 + 2F_3 \\ F_3 \to -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$