1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ e^{x^2} & \text{si } 0\le x<1\\ e+1-\dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ *(1,5 puntos)*

I) CONTINUIDAD: Cada rama es continua en su intervalo de definición.

¿continua en $x=0$? $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$ 0,1

0,1 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1$

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x=0$ 0,175

¿continua en $x=1$? $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} e^{x^2} = e$ 0,1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(e+1-\frac{1}{x}\right) = e$ 0,1

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x=1$ 0,175

Soluc: $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R}}$

$\boxed{1,5}$ (0,75 + 0,75)

II) DERIVABILIDAD:

¿derivable en $x=0$? $f'(0^-) = \cos x\Big]'_{x=0} = -\operatorname{sen} x\Big]_{x=0} = 0$ 0,1

$f'(0^+) = e^{x^2}\Big]'_{x=0} = 2x\cdot e^{x^2}\Big]_{x=0} = 0$ 0,1

$\Rightarrow f(x)$ derivable en $x=0$ 0,175

¿derivable en $x=1$? $f'(1^-) = e^{x^2}\Big]'_{x=1} = 2x\cdot e^{x^2}\Big]_{x=1} = 2e$ 0,1

$f'(1^+) = e+1-\frac{1}{x}\Big]'_{x=1} = \frac{1}{x^2}\Big]_{x=1} = 1$ 0,1

$\Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=1$ 0,175

Soluc: $\boxed{f(x) \text{ derivable } \forall x \in \mathbb{R}-\{1\}}$

---

2. Calcular $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$ $= 1^\infty =$ indeterminado $= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ (*) 0,25 *(1 punto)*

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$ 0,5

Sustituimos en (*): Soluc: $e^1 = \boxed{e}$ 0,25

$\boxed{1}$

NOTA: otra forma: $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = 1^\infty = e^{\lim_{x\to 0^+}(1+x-1)\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}} = e^1 = \boxed{e}$

3. Dada $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ se pide: $\rightarrow$ $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$; se ve que es simétrica impar *(1,5 puntos)*

a) M y m relativos, e intervalos de monotonía.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\boxed{\frac{x^2-1}{x^2}}=0 \Rightarrow x^2-1=0\ ;\ x^2=1\ ;\ x=\pm 1 \text{ posibles Mom}$$

0,1/ 0,1/

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3}+2x}{x^4}=\boxed{\frac{2}{x^3}}$$

0,1

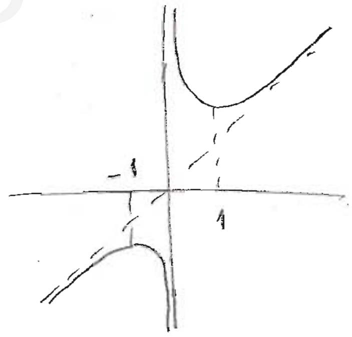
$$f''(1)=\frac{2}{1}>0 \Rightarrow \boxed{m(1,2)}$$

$$f''(-1)=\frac{2}{-1}<0 \Rightarrow \boxed{M(-1,-2)}$$

0,1/

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ f(x) \searrow \forall x\in(-1,0)\cup(0,1) \end{array}}$$

0,1



b) P.I. e intervalos de curvatura.

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}=0 \Rightarrow 2=0\ !! \Rightarrow \boxed{\nexists\ P.I.}$$

0,1/ 0,1/ 0,1/

Viendo el signo de $f''(x)$ vemos que es positiva si $x>0$ y negativa si $x<0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x) \cap \forall x\in(-\infty,0) \\ f(x) \cup \forall x\in(0,\infty) \end{array}}$$

0,2

$\boxed{1,5}$
(0,5+0,5+0,5)

c) Hallar las posibles asíntotas.

$$¿A.H.?\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$$

0,1

$$¿A.V.?\ \lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{0}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=0\ A.V.}$$

0,1

¿A.O.?

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty} 1=1$$

0,1/

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

0,1

$\Rightarrow \boxed{y=x\ A.O.}$ 0,1/

4. Calcular: *(1,5 puntos)*

a) $\displaystyle\int \frac{3x-15}{x^3-3x-2}\,dx$

↳ raíces −1 doble y 2 (por Ruffini...)

$$\frac{3x-15}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \xrightarrow{\cdot (x+1)^2\cdot(x-2)} 3x-15 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2)$$

0,1

$x=-1 \rightarrow -18 = -3C_1 \; ; \; \boxed{C_1 = 6}$

$x=2 \rightarrow -9 = 9A \; ; \; \boxed{A=-1}$ 0,1

$x=1 \rightarrow -12 = 4A - 2B - C \; ; \; -12 = -4 - 2B - 6 \; ; \; 2B = 2 \; ; \; \boxed{B=1}$

$$I = \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{6}{(x+1)^2}\,dx = -\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + 6\int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= -\ln|x-2| + \ln(x+1) + 6\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln(x+1) - \ln(x-2) - \frac{6}{x+1} + C_1}$$

0,1 0,15 0,15 0,15

$\boxed{1,5}$ (0,75+0,75)

b) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx =$

0,25

$u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^x dx \longrightarrow v = \int e^x dx = e^x$

$u = x \longrightarrow du = dx$

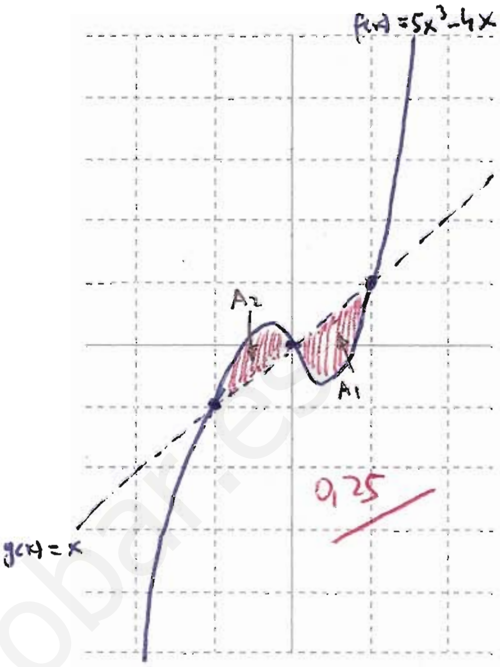
$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \boxed{(x^2-2x+2)\,e^x}$$

0,25 0,25

5. Dibujar, de forma aproximada, el recinto limitado por $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=x$. Hallar su área. *(1,5 puntos)*

$$5x^3-4x=x$$
$$5x^3-5x=0$$
$$5x(x^2-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0;\ x^2=1;\ x=\pm 1 \end{cases}$$ 0,25



0,25

x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	∞
$y=5x^3-4x$	$-\infty$	...	-32	-1	0	1	32	...	∞

Por simetría, se ve que $A_T=A_1+A_2=2A_1$

$$A_1=\int_0^1[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^1[x-(5x^3-4x)]\,dx=\int_0^1(x-5x^3+4x)\,dx=$$ 0,25

$$=\int_0^1(5x-5x^3)\,dx=5\frac{x^2}{2}-5\frac{x^4}{4}\Big]_0^1=\frac{5}{2}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$$ 0,25 0,25

$$\Rightarrow \boxed{A_T=\frac{5}{2}u^2}$$ 0,25

$\boxed{1,5}$ (0,5+1)

6. Resolver la ecuación matricial **AX+B=C**, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ *(1,5 puntos)*

$$AX+B=C;\quad AX=C-B;\quad A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B);\quad \boxed{X=A^{-1}\cdot(C-B)}\quad (*)$$ 0,25

$$C-B=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$\boxed{1,5}$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{vmatrix}=8\Rightarrow \exists A^{-1}$$ 0,25

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\2&4\end{vmatrix}=8\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}=-4\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0&0\\2&4\end{vmatrix}=0\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}=4\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}=0\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=2$$

0,25

$$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}8&-4&0\\0&4&-2\\0&0&2\end{pmatrix}\to {}^t\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix}8&0&0\\-4&4&0\\0&-2&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot {}^t\text{Adj}(A)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&0&0\\-4&4&0\\0&-2&2\end{pmatrix}$$ 0,25

Sustituimos en (*):

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&0&0\\-4&4&0\\0&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&8\\-4&-6&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1/2&-3/4&0\end{pmatrix}}$$ 0,5

7. Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ mx+y+z=1 \\ x+my+3z=m \end{array}\right\}$ *(1,5 puntos)*

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 & m \end{array}\right)}^{M^*}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}}_{M}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro **m**

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3 + \cancel{1} + m^2 - \cancel{1} - m - 3m = m^2 - 4m + 3 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow m=1 \\ \searrow m=3 \end{array} \qquad 0{,}1$$

$$m=1 \rightarrow M = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 2 \qquad 0{,}1$$

$$M^* = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M^* = 2 \qquad 0{,}1$$

$$m=3 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M^* = 2 \qquad 0{,}1$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, M^* = 2 \qquad 0{,}1$$

$\boxed{1{,}5}$
$(0{,}75 + 0{,}75)$

0,25

Soluc.:

I) $m \neq 1$ y $m \neq 3 \Rightarrow rg\, M = rg\, M^* = 3 = n^{\circ}$ incógnitas $\Rightarrow$ sist. compat. determinado. (soluc. única)

II) $m = 1$ o $m = 3 \Rightarrow rg\, M = rg\, M^* = 2 < 3 = n^{\circ}$ incógnitas $\Rightarrow$ sist. compat. indeterminado uniparamétrico (∞ soluciones)

b) Resolverlo para m=3

$m=3 \Rightarrow$ sist. compat. indetdo uniparamétrico $\Rightarrow$ quitamos la 3.ª ecuación y pasamos z como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 - \lambda \\ 3x + y = 1 - \lambda \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-\lambda-(1-\lambda)}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \qquad 0{,}25$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-\lambda-3(1-\lambda)}{-2} = \frac{1-\lambda-3+3\lambda}{-2} = \frac{-2+2\lambda}{-2} = 1-\lambda \qquad 0{,}25$$

$$z = \lambda \qquad 0{,}25$$

Soluc.: $\boxed{x = 0;\ y = 1-\lambda;\ z = \lambda}$