Ejercicios rectas y planos

1. Dada la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$. Determinar: su dirección y dos puntos de la misma.

2. Dada la recta: $\begin{cases} x=1-3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$. Determinar: su vector direccional y dos puntos de la misma.

3. Comprobar si los puntos A(2,3,1), B(5,4,3) y C(2,1,2) están alineados. Sol: No

4. Dados los puntos A(m,2,-3), B(2,6,1) y C(7,1,-4) determinar el valor de m para que estén alineados, y hallar la recta que los contiene. Sol: m=6, $r\equiv\frac{x-6}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$

5. ¿Qué valores deben tener a y b para que los puntos A(2,2,2), B(1,3,5) y C(1,a,b) estén alineados?
Sol: a=3, b=5

6. ¿Qué relación deben verificar los parámetros a, b y c para que los puntos A(1,0,1), B(1,1,0), C(0,1,1) y D(a,b,c) sean coplanarios? Sol: a+b+c-2=0

7. Dada la recta $r\equiv\begin{cases} x+y-3=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$, escribirla en forma continua. Sol: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$

8. Idem. con la recta: $r\equiv\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ Sol: $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1}$

9. Determinar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos A(2,3,5), B(1,1,2) y C(3,6,10).
Sol: x-2y+z-1=0

10. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano $\pi\equiv x-2y+z-1=0$ Sol: $\begin{cases} x=1+2\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$ $\lambda,\mu\in R$

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(3,-1,2) y cuyo vector normal es $\vec{n}(2,1,8)$.
Sol: $\pi\equiv 2x+y+8z-21=0$

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,0,1) y contiene a la recta de ecuación:
$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$ Sol: $\pi\equiv 4x-3y+5z-13=0$

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y es perpendicular al plano x-y-z+2=0.
Sol: $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$

14. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π, siendo:
$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{-1}$ y $\pi\equiv\begin{cases} x=\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$ $\lambda,\mu\in R$ Sol: $\pi_1\equiv -4x-3y+z+8=0$

15. Dada la ecuación del plano 2x+y-8z=4. Hallar los puntos de corte con los ejes cartesianos y el área del triángulo que determinan. Sol: A(2,0,0), B(0,4,0), C(0,0,-1/2), área=$\frac{\sqrt{69}}{2}u^2$

1. *Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$; $s \equiv \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x-5y-z-9=0 \end{cases}$

a. Estudiar su posición relativa Sol: se cortan (2,-1,0)
b. Determinar la ecuación del plano que las contiene. Sol: $\pi \equiv x-5y-8z-7=0$

2. Ídem. con $r \equiv \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $s \equiv \begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 3x+3y+7z-6=0 \end{cases}$ Sol: coincidentes.

3. *Determinar "a" y "b" para que las rectas sean paralelas:

$r \equiv 4x = 2y+6 = z$ $s \equiv \begin{cases} 2x+ay-z=1 \\ 2x+3y+bz=3 \end{cases}$ Sol: a=1; b=-2

4. Hallar los valores de "m" y "n" para que r y s sean paralelas:

$r \equiv \begin{cases} x = 5+5\lambda \\ y = 3+\lambda \quad \lambda \in R \\ z = -\lambda \end{cases}$ $s \equiv \dfrac{x}{m} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{n}$ Sol: m=15, n=-3

5. *Determinar "b" para que la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z}{6}$ no corte al plano

$\pi \equiv 2x-4y+5z=6$ Sol: b=9

6. Hallar los valores de "a" y "b" para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ ax-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+by=3 \\ y+z=3 \end{cases}$ se corten y sean perpendiculares. Sol: a=1, b=1

7. *Hallar los valores de "m" y "n" para que r y s sean paralelas. Hallar también el plano que las contiene. $r \equiv \begin{cases} x = 5+4t \\ y = 3+t \quad t \in R \\ z = -t \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x}{m} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{n}$ Sol: m=12, n=-3, $\pi \equiv 5x-17y+3z+26=0$

8. Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x-ay=1 \\ y-z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y-z=0 \\ x+y+z=8 \end{cases}$ probar que no hay ningún valor de "a" para el cuál son paralelas y averiguar el único valor de "a" para el cuál se cortan. Hallar el punto de intersección en ese caso y el plano que las contiene.
Sol: si a=2 se cortan P(5,2,1) $\pi \equiv 5x-7y-3z-8=0$, si $a \neq 2$ no definida.

9. *Estudiar según los valores del parámetro "a" la posición relativa de las rectas r y s

$r \equiv \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \quad \lambda \in R \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{a-x}{1} = \dfrac{y-2}{a^3} = \dfrac{z-a}{a-1}$ $Sol: \begin{cases} si\ a=-2\ no\ está\ definida \\ si\ a=1\ se\ cortan \\ si\ a \neq 1 \wedge a \neq -2\ se\ cruzan \end{cases}$

10. Estudiar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} kx+y+z=k^2 \\ x+y+kz=k \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+2kz=2$, según los valores del parámetro "k". Sol : $\bullet$ si $k=0 \Rightarrow r \parallel \pi$ $\bullet$ si $k=1 \Rightarrow r \subset \pi$ $\bullet$ si $k \neq 0 \wedge k \neq 1 \Rightarrow r \times \pi$

11. *Dados los planos $\alpha \equiv ax-2z=15$, $\beta \equiv 2x+y+z=-7$, $\gamma \equiv x+y+az=-8a$ determinar los valores de "a" para que los planos pasen por una recta y dar dos puntos y un vector director de ella.
Sol : $a=-1$, $A(-15,23,0)$, $B(1,-1,-8)$, $\vec{u}(2,-3,-1)$

12. Hallar los valores de "a" para que los planos $\begin{cases} \alpha \equiv -x+y+az=0 \\ \beta \equiv ax+2y+2z=0 \end{cases}$ corten al plano $\pi \equiv x-y+z=1$ en dos rectas perpendiculares. Sol: valores que discriminan a=-1, a=6. No hay sol.

1. Hallar el plano que contiene a $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ y pasa por el punto P(-1,0,2) Sol: $\pi \equiv 3x-y+4z-5=0$

2. Hallar el plano π que contiene a r y es paralela a s: $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$

$s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}$ Sol: $\pi \equiv 5x-7y+6z-9=0$

3. Hallar la ecuación del planos que pasa por A(-1,-1,0) y es paralelo a las rectas

$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$ Sol: $\pi \equiv 14x+35y-18z+49=0$

4. Hallar la ecuación del plano π perpendicular al plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 2z - 5 = 0$ que pasa por los puntos P(1,-2,2) y Q(2,0,-1). Sol: $\pi \equiv -16x+11y+2z+34=0$

5. Hallar la ecuación del plano π, que pasa por el punto P(1,0,-1) es perpendicular al plano $\alpha \equiv x - y + 2z + 1 = 0$ y además es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Sol: $\pi \equiv 2x-4y-3z-5=0$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,-1,5) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ Sol: $\frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por A(4,-2,5) y es perpendicular a los planos $\pi_1 \equiv 2x - 5y - 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x + 4y + 3z - 3 = 0$ Sol: $\pi \equiv -3x-15y+23z-133=0$

8. "Recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos que se cruzan".

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$, hallar la ecuación de la recta "t" que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas. Hallar los puntos de apoyos R y Q de t con r y s. Sol: $t \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$ R(23/12, -7/6, 1/6); Q(23/11, -14/11, 2/11)

9. "Perpendicular común a dos rectas que se crucen".

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$

a) Estudiar sus posiciones relativas
b) Hallar la recta perpendicular común a ambas.
c) Hallar los puntos de apoyos P y Q de la perpendicular común a r y s.

Sol: $t \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 5x - 16y - 7z - 21 = 0 \end{cases}$ P(0, 7/15, -61/15), Q(-1/3, 1/3, -4)

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-1,1,2) y se apoya en las rectas:

$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$ y $s \equiv x + 1 = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$ y dar los puntos de apoyo. Sol: $t \equiv \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 \end{cases}$,

R(-5/4, 1/2,2), Q(0, 3, 2)

11. Hallar la perpendicular común a las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$ y los puntos de apoyo. Sol: $t \equiv \begin{cases} -2x + y + 5z - 1 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$