Ejercicios y problemas propuestos

Página 194

Para practicar

Ángulos

1 **Halla el ángulo que forman las rectas r y s en cada caso. Comprueba, previamente, que se cortan:**

a) $r: \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = \quad -2\lambda \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 15 + 5\lambda \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

a) $\vec{d_r}(-2, 3, -2)$; $P(5, 4, 0)$

$\vec{d_s}(-1, 5, 1)$; $P'(5, 4, 0)$

Como $P = P'$ y $\vec{d_s}$ no es porporcional a $\vec{d_r}$, entonces sabemos que se cortan en el punto P.

Para ver el ángulo que forman, hacemos el producto escalar de $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$:

$|\vec{d_r} \cdot \vec{d_s}| = |(-2, 3, -2) \cdot (-1, 5, 1)| = |2 + 15 - 2| = |15|$

$|\vec{d_r}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$; $|\vec{d_s}| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27}$

$$\cos\alpha = \frac{|15|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{27}} = 0{,}7 \to \alpha = 45^\circ\ 33'\ 42''$$

b) Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - \lambda \end{cases}$$

Por lo tanto:

$\vec{d_r}(1, 1, -1)$; $P(3, 0, 15)$

$\vec{d_s}(3, 2, 5)$; $P'(3, 0, 15)$

Como $P = P'$ y $\vec{d_s}$ no es proporcional a $\vec{d_r}$, entonces sabemos que r y s se cortan en el punto P.

$|\vec{d_r} \cdot \vec{d_s}| = |(1, 1, -1) \cdot (3, 2, 5)| = 3 + 2 - 5 = 0$

Como su producto escalar es 0, sabemos que son perpendiculares, por lo que $\alpha = 90^\circ$.

c) $\vec{d_r} = (1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0) = -1(1, 1, 0)$

$\vec{d_s} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

$\alpha = (\widehat{r, s})$

$$\cos\alpha = \left|\frac{(1,1,0)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2}\cdot 1}\right| = 0$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}\ rad \to r \perp s$

2 Halla el valor de m para que r y s formen un ángulo de 90°:

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = m\lambda \end{cases}$$

$\vec{d}_r(-5, 1, -1)$; $\vec{d}_s(1, 2, m)$

Para que r y s formen 90°, el producto escalar de $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ tiene que ser 0:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (-5, 1, -1) \cdot (1, 2, m) = -5 + 2 - m = 0 \rightarrow m = -3$$

3 Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{2}$

$\pi: x - 2y - z + 1 = 0$

b) $r: x = \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = -2$

$\pi: 2x - y + z = 0$

c) $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$

$\pi: x + z = 17$

a) $\vec{d}(-2, 4, 2)$; $\vec{n}(1, -2, -1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|-2 - 8 - 2|}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{12}{12} = 1 \rightarrow 90° - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Observación: Los vectores $\vec{d}$ y $\vec{n}$ tienen la misma dirección, luego la recta y el plano son perpendiculares, es decir, $\alpha = 90°$.

b) $\vec{d}(1, 2, 0)$; $\vec{n}(2, -1, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \rightarrow 90° - \alpha = 90° \rightarrow \alpha = 0°$$

c) $\vec{d}(2, 1, 1)$; $\vec{n}(1, 0, 1)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 90° - \alpha = 30° \rightarrow \alpha = 60°$$

4 Calcula, en cada caso, el ángulo que forman los siguientes pares de planos:

a) $\alpha: z = 3$

$\beta: x - y + 2z + 4 = 0$

b) $\alpha: 2x + y - 3 = 0$

$\beta: x + z - 1 = 0$

a) $\overrightarrow{n_\alpha}(0, 0, 1)$; $\overrightarrow{n_\beta}(1, -1, 2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}||\overrightarrow{n_\beta}|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0{,}816 \rightarrow \varphi = 35°\ 15'\ 52''$$

b) $\overrightarrow{n_\alpha}(2, 1, 0)$; $\overrightarrow{n_\beta}(1, 0, 1)$

$$\cos\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{|(2, 1, 0) \cdot (1, 0, 1)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \rightarrow \widehat{(\alpha, \beta)} = arc\cos\frac{2}{\sqrt{10}} = 50°\ 47'$$

5 **Calcula los tres ángulos de los triángulos cuyos vértices son:**

a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 1, 1)$

b) $A(2, 7, 3)$, $B(1, 2, 5)$, $C(-1, -2, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0{,}73855 \rightarrow \hat{A} = 42° \, 23' \, 31''$$

$\overrightarrow{BA} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \rightarrow \hat{B} = 90°$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 47° \, 36' \, 29''$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 2)$

$\overrightarrow{AC} = (-3, -9, 2)$

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{52}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{94}} = 0{,}97922 \rightarrow \hat{A} = 11° \, 42' \, 6''$$

$\overrightarrow{BA} = (1, 5, -2)$

$\overrightarrow{BC} = (-2, -4, 0)$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-22}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}} = -0{,}898 \rightarrow \hat{B} = 153° \, 54' \, 56''$$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 14° \, 22' \, 58''$

6 **Calcula el ángulo que forma el plano π con cada uno de los ejes coordenados:**

$$\pi: x - 2y + z = 0$$

El ángulo entre una recta y un plano es complementario del que forma dicha recta con la dirección normal al plano.

El vector normal a π es $\vec{n}(1, -2, 1)$.

- El ángulo que forma π con el eje *X*, de vector director $(1, 0, 0)$, es:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|(1, 0, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(1, 0, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{6}} = 0{,}408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90° - \alpha = 65° \, 54' \, 19'' \rightarrow \alpha = 24° \, 5' \, 41''$$

- El ángulo que forma π con el eje *Y*, de vector director $(0, 1, 0)$, es:

$$\cos(90° - \beta) = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 1, 0)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = 0{,}8165 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90° - \beta = 35° \, 15' \, 52'' \rightarrow \beta = 54° \, 44' \, 8''$$

- El ángulo que forma π con el eje *Z*, de vector director $(0, 0, 1)$, es:

$$\cos(90° - \gamma) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (1, -2, 1)|}{|(0, 0, 1)| \cdot |(1, -2, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}408 \rightarrow$$

$$\rightarrow 90° - \gamma = 65° \, 54' \, 19'' \rightarrow \gamma = 24° \, 5' \, 41''$$

7 **Calcula el valor de m para que las rectas r y s formen un ángulo de 60°.**

$$r: \begin{cases} x = 1+\gamma \\ y = \sqrt{2}\gamma \\ z = 1-\gamma \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 1+m\mu \\ z = 1+\mu \end{cases}$$

$\vec{d}_r = (1, \sqrt{2}, -1)$

$\vec{d}_s = (1, m, 1)$

$\alpha = (\widehat{r, s})$

$$cos\ \alpha = \left| \frac{(1, \sqrt{2}, -1) \cdot (1, m, 1)}{2 \cdot \sqrt{2+m^2}} \right| = \frac{1}{2} \to \left| \frac{\sqrt{2}m}{2 \cdot \sqrt{2+m^2}} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2+m^2}} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2+m^2}} = -1 \end{array} \right\} \to \begin{cases} \sqrt{2}m = \sqrt{2+m^2} \to m = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}m = -\sqrt{2+m^2} \to m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Distancias

8 **Tenemos la recta r y los planos π y σ siguientes:**

$$r: \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-6\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \pi: x+2y-z=1 \\ \sigma: x-y+z=3 \end{array}$$

a) Halla el punto P en el que se cortan la recta r y el plano π.

b) Calcula las coordenadas del punto Q donde se cortan r y σ.

c) Obtén la distancia que separa a los puntos P y Q de los apartados anteriores.

a) La intersección de r con π la podemos hallar sustituyendo las coordenadas de r en π:

$$8\lambda + 2(2) - (3 - 6\lambda) = 1 \to \lambda = 0$$

Por lo que el punto es $P = (0, 2, 3)$.

b) De la misma forma hallamos Q:

$$8\lambda - 2 + 3 - 6\lambda = 3 \to \lambda = 1$$

Así, $Q = (8, 2, -3)$.

c) $dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(8, 0, -6)| = 10$ u

9 **Calcula, en cada caso, la distancia entre el punto P y el plano π:**

a) $P(2, -3, 1)$ $\pi: 3x - 4z = 3$ **b) $P(0, 1, 3)$ $\pi: x - y - 2z + 3 = 0$**

c) $P(2, 0, 1)$ $\pi: x + y - 2z = 0$ **d) $P(3, -4, 1)$ $\pi: y = 3$**

a) $dist\ (P, \pi) = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ u

b) $dist\ (P, \pi) = \dfrac{|0 - 1 - 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} \approx 1,633$ u

c) $dist\ (P, \pi) = \dfrac{|2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = 0$ u

d) $dist\ (P, \pi) = \dfrac{|-4 - 3|}{1} = 7$ u

10 **Calcula la distancia entre el punto $Q(2, -1, 0)$ y el plano que contiene al punto $P(2, 0, 4)$ y a la recta:**

$$s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

El plano π, que contiene a P y a s, tiene como vectores dirección $\vec{d_s}$ y $\overrightarrow{PP'}$, siendo P' un punto de s como $P'(3, 2, 4)$.

Hallamos el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{d_s} \times \overrightarrow{PP'} = (-2, 3, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, -7)$$

Tomamos un vector proporcional a $\vec{n}$: $(0, 0, 1)$

Por tanto, el plano es π: $z = 4$

$$dist\,(Q, \pi) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

11 **Halla la distancia entre los siguientes pares de planos:**

a) π_1: $x - 2y + 3 = 0$; π_2: $2x - 4y + 1 = 0$

b) π_1: $3x - 2y + z - 2 = 0$; π_2: $2x - y + z = -5$

a) Vemos claramente que los dos planos son paralelos. Por tanto, tomamos un punto de P de π_1 y hallamos la distancia del punto P al plano π_2.

$$P(-3, 0, 0) \in \pi_1$$

$$dist\,(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = 1{,}12 \text{ u}$$

b) Los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, por lo que los planos se cortan. La distancia es, por tanto, cero.

12 **Halla la distancia de la recta r al plano π en cada caso:**

a) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 7\lambda \end{cases}$ $\quad \pi: 3x - 4y - 3 = 0$

b) $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ $\quad \pi: 7x - 2y - z + 1 = 0$

Lo primero que tenemos que ver es si el plano y la recta se cortan: si el vector normal al plano es perpendicular al vector dirección de la recta, entonces, o son paralelos, o la recta está contenida en el plano.

a) $\vec{d_r}(4, 3, 7)$; $\vec{n}(3, -4, 0)$

$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 12 - 12 = 0 \rightarrow$ son perpendiculares

Como el punto $P(2, 0, -1) \in r$ no está contenido en el plano, r y π son paralelos, por lo que la distancia de r a π es igual a la distancia de cualquier punto de r a π. Tomamos P como punto de r.

$$dist\,(r, \pi) = dist\,(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ u}$$

b) $\vec{d_r}(2, 0, 1)$

$\vec{n}(7, -2, -1)$

$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 14 - 1 = 13 \neq 0 \rightarrow$ no son perpendiculares $\rightarrow$ r y π se cortan.

$$dist\,(r, \pi) = 0 \text{ u}$$

13 **Calcula la distancia que hay entre el punto $P(3, 1, 6)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$ mediante los siguientes pasos:**

a) Halla un plano, π, que sea perpendicular a r y que contenga a P.

b) Obtén la intersección del plano hallado, π, con r. Llama a ese punto Q.

c) Calcula la distancia de P a Q.

a) El vector normal al plano π es el vector dirección de la recta r.

La ecuación de π es:

$$4(x-3) + (y-1) - 3(z-6) = 0 \to \pi: 4x + y - 3z + 5 = 0$$

b) Para hallar la intersección de π con r, sustituimos las coordenadas genéricas de r en la ecuación de π:

$$4(4 + 4\lambda) + (2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 5 = 0 \to \lambda = -1$$

Sustituimos λ en las ecuaciones paramétricas de $r \to Q(0, 1, 2)$

c) $dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ u

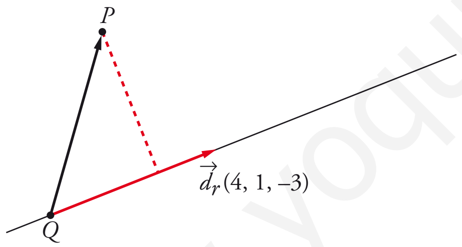
Página 195

14 **Calcula la distancia que hay entre la recta y el punto del ejercicio anterior mediante los siguientes pasos:**

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto de la recta r.

b) Halla el área del paralelogramo descrito por el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector dirección de r.

c) Divide el área calculada entre el módulo del vector dirección de r.



a) $P(3, 1, 6)$, $Q(4, 2, -1) \in r$

$\overrightarrow{PQ}\,(1, 1, -7)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (4, -25, -3)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{4^2 + 25^2 + 3^2} = \sqrt{650}$ u^2

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{650}}{\sqrt{26}} = 5$ u

15 **Halla la distancia entre el punto $P(2, 2, -11)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 9 + 12\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 6 + 5\lambda \end{cases}$ siguiendo los pasos de los ejercicios anteriores.**

a) $\left.\begin{array}{l} P(2, 2, -11) \\ Q(9, -1, 6) \end{array}\right\} \to \overrightarrow{PQ}(7, -3, 17)$

b) $\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r = (36, 169, 15)$

Área del paralelogramo $= |\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r| = \sqrt{36^2 + 169^2 + 15^2} = \sqrt{30\,082}$ u^2

c) $dist\,(P, r) = \dfrac{\text{Área del paralelogramo}}{\text{Longitud de la base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \dfrac{\sqrt{30\,082}}{\sqrt{178}} = 13$ u

16 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -10 - 3\lambda \\ z = 9 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 12\lambda \\ y = 1 + 9\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, sigue estos pasos:

a) Halla el plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a la recta s.

b) Halla la distancia de un punto (el que quieras) de s al plano π.

r: $R(0, -10, 9)$, $\vec{d}_r(4, -3, 5)$

s: $S(2, 1, 4)$, $\vec{d}_s(-12, 9, 1)$

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (4, -3, 5) \times (-12, 9, 1) = (-48, -64, 0) \,//\, (3, 4, 0) \perp \pi$

π está definido por un punto, $R(0, -10, 9)$, y un vector normal, $(3, 4, 0)$.

$$\pi: 3(x - 0) + 4(y + 10) + 0(z - 9) = 0 \;\rightarrow\; \pi: 3x + 4y + 40 = 0$$

b) $dist\,(r, s) = dist\,(s, \pi) = dist\,(S, \pi) = \dfrac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 40}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \dfrac{50}{5} = 10$ u

17 **Halla la distancia que hay entre estas rectas siguiendo los pasos del ejercicio anterior:**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 19 + 12\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 10 - 10\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 26 - 24\lambda \end{cases}$$

- El vector normal a π será $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (5, 1, 12) \times (-10, 5, -24) = (-84, 0, 35)$

  $$-84(x + 7) + 35(z - 19) = 0 \;\rightarrow\; \pi: -84x + 35z - 1\,253 = 0$$

- $Q(10, -2, 26) \in s$

  $dist\,(r, s) = dist\,(Q, \pi) = \dfrac{|-84 \cdot 10 + 35 \cdot 26 - 1\,253|}{\sqrt{84^2 + 35^2}} = \dfrac{1183}{91} = 13$ u

18 **Calcula la distancia que hay entre estas rectas:**

$$r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Para ello, haz lo siguiente:

a) Halla el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo P y Q puntos de las rectas r y s, respectivamente.

b) Halla el volumen, V, del paralelepípedo descrito por $\overrightarrow{PQ}$ y los vectores dirección de r y s.

c) Halla el área, A, del paralelogramo descrito por los vectores dirección de r y s.

d) La distancia de r a s coincide con el resultado de dividir V entre A.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 2, 1) \\ P(-2, 0, 1) \end{cases}$; $\quad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-1, 5, 1) \\ Q(1, 0, -2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -2) - (-2, 0, 1) = (3, 0, -3)$

b) $V = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = |-60| = 60 \text{ u}^3$

c) Área $= |\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |(3, 2, 1) \times (-1, 5, 1)| = |(-3, -4, 17)| = \sqrt{9 + 16 + 289} = \sqrt{314} \text{ u}^2$

d) $dist\,(r, s) = \dfrac{60}{\sqrt{314}}$ u

Áreas y volúmenes

19 **Halla el área de cada uno de los triángulos ABC donde:**

a) $A(2, 7, 3)$, $B(1, -5, 4)$, $C(7, 0, 11)$ **b) $A(3, -7, 4)$, $B(-1, 2, 5)$, $C(-5, 11, 6)$**

Justifica la solución del segundo.

a) $\overrightarrow{AB}(-1, -12, 1)$; $\overrightarrow{AC}(5, -7, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(-89, 13, 67)|}{2} = \frac{\sqrt{12\,579}}{2} \approx 56{,}08 \text{ u}^2$$

b) $\overrightarrow{AB}(-4, 9, 1)$; $\overrightarrow{AC}(-8, 18, 2)$

Las coordenadas son proporcionales, luego los puntos están alineados:

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 0$

20 **Calcula, en cada caso, el volumen del tetraedro de vértices:**

a) $(2, 1, 4)$; $(1, 0, 2)$; $(4, 3, 2)$; $(1, 5, 6)$ **b) $(4, 1, 2)$; $(2, 0, 1)$; $(2, 3, 4)$; $(6, 5, 1)$**

a) $A(2, 1, 4)$; $B(1, 0, 2)$; $C(4, 3, 2)$; $D(1, 5, 6)$

$\overrightarrow{AB}(-1, -1, -2)$; $\overrightarrow{AC}(2, 2, -2)$; $\overrightarrow{AD}(-1, 4, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

b) $A(4, 1, 2)$; $B(2, 0, 1)$; $C(2, 3, 4)$; $D(6, 5, 1)$

$\overrightarrow{AB}(-2, -1, -1)$; $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 2)$; $\overrightarrow{AD}(2, 4, -1)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5 \text{ u}^3$$

21 **Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:**

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

- Área del triángulo ABC:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2\,058}}{2} \approx 22{,}68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD:

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7\,448}}{2} = 43{,}15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD:

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14\,490}}{2} = 60{,}19 \text{ u}^2$$

- Área total = 14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 u^2
- Volumen = $\overrightarrow{AB}(2, -2, -3)$; $\overrightarrow{AC}(4, 0, 6)$; $\overrightarrow{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{308}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

22 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano:**

$$\pi: 6x - 5y + 3z - 30 = 0$$

- Hallamos los vértices:

$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = 10 \rightarrow A(0, 0, 10)$$
$$y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow B(5, 0, 0)$$
$$x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = -6 \rightarrow C(0, -6, 0)$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(10 \cdot 5 \cdot 6) = 50 \text{ u}^2$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}\right| = 50 \text{ u}^3$$

23 **Halla la ecuación del plano π perpendicular a la recta r: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por π y los tres planos coordenados.**

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es:

$$2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0 \rightarrow 2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Esfera

24 **Justifica cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a esferas y di su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

b) $2x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 3 = 0$

f) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 12z - 30 = 0$

g) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 6y - 3/2 = 0$

a) No tiene término en z^2. No es una esfera.

b) Los coeficientes de x^2, y^2, z^2 no son iguales, luego no es una esfera.

c) Los coeficientes de $x^2,\ y^2,\ z^2$ son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2,\ y^2,\ z^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 0 - (-8) = 9 \to radio = \sqrt{9} = 3$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 0)$$

d) Los coeficientes de $x^2,\ y^2,\ z^2$ no son iguales, luego no es una esfera.

e) Los coeficientes de $x^2,\ y^2,\ z^2$ son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2,\ y^2,\ z^2 + 2x - 4z - 1 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-1) = 6 \to radio = \sqrt{6}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

f) Los coeficientes de $x^2,\ y^2,\ z^2$ son iguales. Dividimos la ecuación entre 3:

$$x^2,\ y^2,\ z^2 + 2x - 4z - 10 = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + 0 + 4 - (-10) = 15 \to radio = \sqrt{15}$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = (-1, 0, 2)$$

g) Los coeficientes de $x^2,\ y^2,\ z^2$ son iguales. Dividimos la ecuación entre 2:

$$x^2,\ y^2,\ z^2 + 2x - + 3y - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - D = 1 + \frac{9}{4} + 0 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 4 \to radio = 2$$

$$Centro = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right) = \left(-1, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

25 Halla la ecuación de las siguientes esferas:

a) Centro (1, 0, –5) y radio 1.

b) Diámetro AB con $A(3, -4, 2)$, $B(5, 2, 0)$.

c) Centro (4, –2, 3) y tangente al plano $x - z = 0$.

d) Centro (3, –1, 2) y tangente al plano YZ.

a) $(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 1$, o bien, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10z + 25 = 0$

b) El centro es el punto medio de AB:

$$C = \left(\frac{3+5}{2}, -\frac{4+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (4, -1, 1)$$

El radio es la distancia de C a uno de los puntos:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

La ecuación es:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 2z + 7 = 0$$

c) El radio es la distancia del centro $C(4, -2, 3)$ al plano $\pi: x - z = 0$:

$$r = dist\,(C, \pi) = \frac{|4-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to r^2 = \frac{1}{2}$$

La ecuación será:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \frac{1}{2}, \text{ o bien:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z + \frac{57}{2} = 0 \to 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x + 8y - 12z + 57 = 0$$

d) El plano YZ es el plano $\pi: x = 0$.

El radio es la distancia del centro $C(3, -1, 2)$ al plano π:

$$r = dist\,(C, \pi) = 3$$

La ecuación será:

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$$

26 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (2, –1, 4) es igual a 7.**

Es una esfera de centro (2, –1, 4) y radio 7:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2, \text{ o bien, } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z - 28 = 0$$

27 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $A(-2, 3, 4)$ sea el doble de la distancia a $B(3, -1, -2)$.**

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$dist\,(P, A) = 2dist\,(P, B)$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4((x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2)$$

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 29 - (4x^2 - 24x + 4y^2 + 8y + 4z^2 + 16z + 56) = 0$$

$$-3x^2 + 28x - 3y^2 - 14y - 3z^2 - 24z - 27 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 28x + 14y + 24z + 27 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia.

28 **Dados $A(4, 2, 0)$ y $B(2, 6, -4)$, halla el lugar geométrico de los puntos P tales que PA sea perpendicular a PB.**

Consideramos un punto genérico: $P(x, y, z)$

$$\overrightarrow{PA} = (4, 2, 0) - (x, y, z) = (4-x, 2-y, -z)$$

$$\overrightarrow{PB} = (2, 6, -4) - (x, y, z) = (2-x, 6-y, -z-4)$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

$$(4-x, 2-y, -z) \cdot (2-x, 6-y, -z-4) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 20 = 0$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro el punto medio entre A y B.

Página 196

Para resolver

29 **Halla los puntos de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos $\alpha: 4x - 3y - 1 = 0$ y $\beta: 3x + 4y - 1 = 0$.**

Punto genérico de la recta: $P(1 + \lambda, -2 + \lambda, \lambda)$

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta)$$

$$\frac{|4(1+\lambda) - 3(-2+\lambda) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{|3(1+\lambda) + 4(-2+\lambda) - 1|}{\sqrt{25}} \to |\lambda + 9| = |7\lambda - 6| \to$$

$$\to \begin{cases} \lambda + 9 = 7\lambda - 6 \to -6\lambda + 15 = 0 \to \lambda = \dfrac{5}{2} \\ \lambda + 9 = -(7\lambda - 6) \to 8\lambda + 3 = 0 \to \lambda = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$P=\left(1+\frac{5}{2},-2+\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right),\quad P'=\left(1-\frac{3}{8},-2-\frac{3}{8},-\frac{3}{8}\right)$$

$$P=\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right),\quad P'=\left(\frac{5}{8},-\frac{19}{8},-\frac{3}{8}\right)$$

30 **a) Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases} x+\ \ y-z+1=0 \\ x+2y+z\quad\ \ =0\end{cases}$ y es perpendicular al plano σ: $2x-y+3z+1=0$.**

b) Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

c) Halla el ángulo que forma la recta r con el plano σ.

a) Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$$P(1,-1,1)\in r \to P(1,-1,1)\in \pi$$

$$(1,1,-1)\times(1,2,1)=(3,-2,1)=\vec{d}\ //\ r \to \vec{d}(3,-2,1)\ //\ \pi$$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\overrightarrow{n_\sigma}(2,-1,3)\perp\sigma \to (2,-1,3)\ //\ \pi$$

Obtenemos un vector normal a π:

$$(3,-2,1)\times(2,-1,3)=(-5,-7,1) \to (5,7,-1)$$

La ecuación del plano π es:

$$5(x-1)+7(y+1)-1(z-1)=0 \to 5x+7y-z+3=0$$

b) Ecuaciones paramétricas de la recta determninada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 5x+7y-\ z+3=0\\ \sigma: 2x-\ y+3z+1=0\end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta:

$$(5,7,-1)\times(2,-1,3)=(20,-17,-19)$$

Punto de la recta:

$$x=0 \to \left.\begin{array}{r}7y-\ z+3=0\\ -y+3z+1=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{2}\\ z=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\ R\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x=20\lambda \\ y=-\dfrac{1}{2}-17\lambda \\ z=-\dfrac{1}{2}-19\lambda\end{cases}$$

c) $\alpha=(\widehat{r,s})$

$\beta=(\widehat{r,n_\sigma})$

$\alpha=90°-\beta$

$$\cos\beta=\frac{(3,-2,1)\cdot(2,-1,3)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{6-2+3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{1}{2} \to \beta=60°$$

$\alpha=90°-60°=30°$

31 **Si** $r: \begin{cases} x \quad - 2z + 3 = 0 \\ y - \ z - 4 = 0 \end{cases}$ **y** π**:** $x + 2y + 3z - 1 = 0$**, halla la ecuación de una recta situada en el plano** π**, que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r**.**

Un vector dirección de r es:

$$(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a (2, 1, 1) y perpendicular a (1, 2, 3) (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

32 **Determina la recta perpendicular común a las rectas siguientes:**

$$r: \begin{cases} x + \ y = z + 4 \\ x + 2y = \quad 7 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x \quad - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + \ y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Restando la 1.ª ecuación a la 2.ª:

$$y = 3 - z \rightarrow x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$$

Haciendo $z = \lambda$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } r \text{ es } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \text{Un punto genérico de } s \text{ es } S(2, -3, \mu)$$

Un vector variable de origen en r y extremo en s es $\overrightarrow{RS}\,(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$.

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \rightarrow \mu = \lambda \end{array}\right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5};\ \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

33 **a) Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:**

$$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \qquad\qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$$

b) Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene para el valor de p que has hallado.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p-1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \;\rightarrow\; p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

- Punto de intersección:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}\right\} \text{ Sumando las dos últimas ecuaciones: } 1 = 9 + 8\mu \;\rightarrow\; -8 = 8\mu \;\rightarrow\; \mu = -1$$

$$\lambda = \frac{3 + 3\mu}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

1.ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

- Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \;\rightarrow\; (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación:

$$8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0 \;\rightarrow\; 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

34 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta siguiente:**

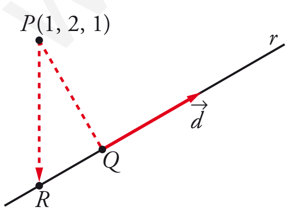
$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \;\rightarrow\; y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \;\rightarrow\; x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es: $R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \;\rightarrow\; (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$$

$$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; 6\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0$$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(1, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

35 Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje Y.

Los vértices del triángulo son:

$$y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ 2x = 6 \ \rightarrow\ x = 3 \ \rightarrow\ A(3, 0, 0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow\ y = 6 \ \rightarrow\ B(0, 6, 0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow\ -3z = 6 \ \rightarrow\ z = -2 \ \rightarrow\ C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B.

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

- Ortogonal a $\overrightarrow{AC} \ \rightarrow\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0$
- Ortogonal al vector normal del plano ABC, es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$.

Luego tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lll} \overrightarrow{AC} \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, 3) \cdot \vec{d} = 0 & \rightarrow\ (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 & \rightarrow\ 2a + b - 3c = 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \ \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

36 Halla el punto P de la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidiste de los planos:

$$\alpha: x + y + z = -3 \quad \text{y} \quad \beta: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \quad -\lambda + \mu \\ z = -6 \quad + \mu \end{cases}$$

- Un punto genérico de la recta r es: $R(1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 3\lambda)$
- Escribimos el plano β en forma implícita:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow\ \beta: x + y - z - 3 = 0$$

- La distancia de R a α y a β ha de ser la misma: $dist\,(R, \alpha) = dist\,(R, \beta)$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda + 3\lambda + 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1 + 2\lambda - 1 + \lambda - 3\lambda - 3|}{\sqrt{1+1+1}}, \text{ es decir:}$$

$$|6\lambda + 3| = 3 \begin{cases} 6\lambda + 3 = 3 \ \rightarrow\ 6\lambda = 0 \ \rightarrow\ \lambda = 0 \\ 6\lambda + 3 = -3 \ \rightarrow\ 6\lambda = -6 \ \rightarrow\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $P(1, -1, 0)$ y $P'(-1, -2, -3)$

37 Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano σ: $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

38 **a) Halla las ecuaciones de la recta que corta perpendicularmente a r y s:**

$$r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 + 4\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

b) Calcula la distancia entre r y s.

a) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(1, 5, 0) \\ P(-3, -2, 0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \vec{d}_s(0, 4, 1) \\ Q(3, -6, 2) \end{cases}$

Vector perpendicular común:

$$\vec{v} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (1, 5, 0) \times (0, 4, 1) = (5, -1, 4)$$

La recta t perpendicular común es la intersección $\pi \cap \pi'$, con π, plano que contiene a r y es paralelo a $\vec{v}$ y π', plano que contiene a s y es paralelo a $\vec{v}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y+2 & z \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 20x - 4y - 26z + 52 = 0$$

$$\pi': \begin{vmatrix} x-3 & y+6 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to 17x + 5y - 20z + 19 = 0$$

$$t: \begin{cases} 20x - 4y - 26z + 52 = 0 \\ 17x + 5y - 20z + 19 = 0 \end{cases}$$

b) $P \in r \to P(-3 + \lambda, -2 + 5\lambda, 0)$

$Q \in s \to Q(3, -6 + 4\mu, 2 + \mu)$

El vector perpendicular común verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_r = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{d}_s = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (1, 5, 0) = 0 \to 20\mu - 26\lambda - 14 = 0 \\ (6 - \lambda, 4\mu - 5\lambda - 4, \mu + 2) \cdot (0, 4, 1) = 0 \to 17\mu - 20\lambda - 14 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1, \; \mu = 2$

Los puntos que determinan la distancia mínima son:

$P = (-3 + 1, -2 + 5, 0) = (-2, 3, 0)$

$Q = (3, -6 + 8, 2 + 2) = (3, 2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, Q) = \sqrt{(3+2)^2 + (2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{42} \text{ u}$$

39 **Sea r la recta de intersección de los planos $ax + 9y - 3z = 8$ y $x + ay - z = 0$.**

Determina el valor de a para que:

a) Los dos planos sean paralelos.

b) Los dos planos sean perpendiculares.

c) La recta r corte al plano XY en un punto cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a $\sqrt{2}$.

a) Las coordenadas de $(a, 9, -3)$ y $(1, a, -1)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{a}{1} = \frac{9}{a} = \frac{-3}{-1} \; \Big< \; \left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{1} = \dfrac{-3}{-1} \to a = 3 \\ \dfrac{9}{a} = \dfrac{-3}{-1} \to a = 3 \end{array}\right\} a = 3$$

b) Los vectores normales han de ser perpendiculares:

$$(a, 9, -3) \cdot (1, a, -1) = a + 9a + 3 = 10a + 3 = 0 \to a = \frac{-3}{10}$$

c) El plano OXY es el plano $z = 0$. Hallamos el punto de corte de r con el plano OXY:

$$\left.\begin{aligned} ax + 9y - 3z &= 8 \\ x + ay - \ \ z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} ax + 9y &= 8 \\ x + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 9$$

(El problema solo tiene solución si $a^2 - 9 \neq 0$, es decir, si $a \neq 3$ y $a \neq -3$. Si $a = 3$ o $a = -3$, el sistema es incompatible).

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 8a$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$x = \frac{8a}{a^2 - 9}; \quad y = \frac{-8}{a^2 - 9}; \quad z = 0$$

El punto de corte es $P\left(\dfrac{8a}{a^2 - 9}, \dfrac{-8}{a^2 - 9}, 0\right)$. Su distancia al origen ha de ser $\sqrt{2}$:

$$dist\,(P, O) = \sqrt{\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{8a}{a^2 - 9}\right)^2 + \left(\frac{-8}{a^2 - 9}\right)^2 = 2 \ \rightarrow\ \frac{64a^2 + 64}{(a^2 - 9)^2} = 2$$

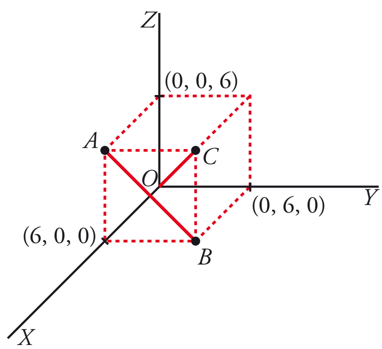
$$64a^2 + 64 = 2(a^4 + 81 - 18a^2) \ \rightarrow\ 64a^2 + 64 = 2a^4 + 162 - 36a^2$$

$$0 = 2a^4 - 100a^2 + 98 \ \rightarrow\ a^4 - 50a^2 + 49 = 0$$

$$a^2 = \frac{50 \pm \sqrt{2\,500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2\,304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} \begin{cases} a^2 = 49 \ \rightarrow\ a = \pm 7 \\ a^2 = 1 \ \rightarrow\ a = \pm 1 \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones: $a_1 = -7$, $a_2 = 7$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$

40 Dibuja un cubo de 6 unidades de lado, con un vértice en el origen y los tres vértices contiguos sobre los ejes de coordenadas. Halla la mínima distancia de una diagonal del cubo a una diagonal de una cara, sabiendo que las rectas que contienen a las diagonales se cruzan.



• La diagonal del cubo para por $O(0, 0, 0)$ y por $C(6, 6, 6)$:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

• La diagonal de la cara pasa por $A(6, 0, 6)$ y por $B(6, 6, 0)$:

$$s: \begin{cases} x = 6 \\ y = \mu \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

• $dist\,(r, s) = \dfrac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \dfrac{|[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}]|}{|\vec{d} \times \vec{d'}|}$

$$[\vec{d}, \vec{d'}, \overrightarrow{OA}\,] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$\vec{d} \times \vec{d'} = (1, 1, 1) \times (0, 1, -1) = (-2, 1, 1) \ \rightarrow\ |\vec{d} \times \vec{d'}| = \sqrt{6}$$

Por tanto: $dist\,(r, s) = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ u

41 **Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (1, 3, 2).**

Si el punto más próximo al origen es $P(1, 3, 2)$, el vector $\overrightarrow{OP}\,(1, 3, 2)$ es normal al plano.

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$1(x-1) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0 \;\rightarrow\; x + 3y + 2z - 14 = 0$$

42 **Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano α: $x - 3y - 2z + 4 = 0$ y respecto de la recta:**

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

— Simétrico respecto del plano:

- Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

- Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces:

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \;\rightarrow\; P'(2, -1, 1)$$

— Simétrico respecto de la recta:

- Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 \;\rightarrow\; y = x + 3 \\ 4x - z = 0 \;\rightarrow\; z = 4x \end{cases}\right\} \;\rightarrow\; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x-1) + 1(y-2) + 4(z-3) = 0 \;\rightarrow\; x + y + 4z - 15 = 0$$

- Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18L - 12 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces:

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \;\rightarrow\; P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

43 **a) Encuentra los puntos de** $r: \begin{cases} x + y \quad = 0 \\ x - \quad z = 0 \end{cases}$ **que disten** $\frac{1}{3}$ **del plano** π**:** $2x - y + 2z + 1 = 0$**.**

b) Obtén los puntos de π **que distan** $\frac{1}{3}$ **de los puntos hallados en el apartado anterior.**

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{matrix} y = -x \\ z = x \end{matrix}\right\} \to r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \to \text{Un punto de } r \text{ es de la forma } R(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$dist\,(R, \pi) = \frac{|2\lambda + \lambda + 2\lambda + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|5\lambda + 1|}{3} = \frac{1}{3} \begin{cases} 5\lambda + 1 = 1 \to \lambda = 0 \\ 5\lambda + 1 = -1 \to \lambda = -2/5 \end{cases}$$

Hay dos puntos: $(0, 0, 0)$ y $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

b) Los dos puntos obtenidos están a distancia $\frac{1}{3}$ de π.

Se trata de encontrar la proyección de estos puntos sobre el plano π.

- Para $(0, 0, 0)$:

  Obtenemos la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

  Hallamos el punto de corte de esta recta con π:

  $$4\lambda + \lambda + 4\lambda + 1 = 0 \to 9\lambda = -1 \to \lambda = -\frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right)$.

- Para $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$:

  Hallamos la recta que pasa por este punto y es perpendicular a π:

  $$\begin{cases} x = -2/5 + 2\lambda \\ y = 2/5 - \lambda \\ z = -2/5 + 2\lambda \end{cases}$$

  Obtenemos el punto de corte de esta recta con π:

  $$2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) - \left(\frac{2}{5} - \lambda\right) + 2\left(-\frac{2}{5} + 2\lambda\right) + 1 = 0$$

  $$-\frac{4}{5} + 4\lambda - \frac{2}{5} + \lambda - \frac{4}{5} + 4\lambda + 1 = 0$$

  $$9\lambda - 1 = 0 \to \lambda = \frac{1}{9}$$

  El punto es $\left(-\frac{8}{45}, \frac{13}{45}, -\frac{8}{45}\right)$.

44 **Dados los puntos $A(-1, 3, -1)$, $B(-3, 1, -7)$ y $C(0, 5, 1)$:**

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.

b) Halla la longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC.

a) Es suficiente probar que no están alineados:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -7) - (-1, 3, -1) = (-2, -2, -6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 5, 1) - (-1, 3, -1) = (1, 2, 2)$$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{-2}{2} \to \text{ Los puntos no están alineados, son vértices de un triángulo.}$$

b) El segmento que nos piden es la altura del triángulo que forman.

Calculamos el área del paralelogramo, A_p, que forman $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, la dividimos entre la medida de la base, $|\overrightarrow{AC}|$ y obtenemos la altura:

$$A_p\text{: } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |(-2, -2, -6) \times (1, 2, 2)| = |(8, 2, 2)| = \sqrt{64 + 4 + 4} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Medida de la base: } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

La longitud del segmento que determina el punto B y su proyección sobre AC es:

$$\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$

45 **Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r\colon \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ y otro sobre $s\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+5}{-2}$.**

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Si uno de los vértices del cuadrado es $(0, 0, 0)$, ¿cuál es el otro vértice situado sobre la recta r?

a) $r\colon \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \to x = -\lambda,\ y = \dfrac{1}{2}\lambda,\ z = \lambda$

$$r\colon \begin{cases} \vec{d}_r\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}; \qquad s\colon \begin{cases} \vec{d}_s(2, -1, -2) \\ P_s(3, 1, -5) \end{cases}$$

$$\vec{d}_s = -2\,\vec{d}_r \to r \parallel s$$

El lado del cuadrado es la distancia entre las rectas.

$$l = dist\,(r, s) = dist\,(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(3, 1, -5) \times (2, -1, -2)|}{|(2, -1, -2)|} =$$

$$= \frac{|(-7, -4, -5)|}{|(2, -1, -2)|} = \frac{\sqrt{49 + 16 + 25}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \sqrt{10} \text{ u}$$

Área $= 10$ u^2

b) Un punto genérico de r es:

$$A\left(-\lambda, \frac{1}{2}\lambda, \lambda\right)$$

$$dist\,(A, O) = \sqrt{10} \to \sqrt{(-\lambda)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 + (\lambda)^2} = \sqrt{10} \to \frac{9}{4}\lambda^2 = 10 \to$$

$$\to \lambda = \frac{2}{3}\sqrt{10},\ \lambda = -\frac{2}{3}\sqrt{10}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$A\left(-\frac{2}{3}\sqrt{10}, \frac{1}{3}\sqrt{10}, \frac{2}{3}\sqrt{10}\right) \text{ y } A'\left(\frac{2}{3}\sqrt{10}, -\frac{1}{3}\sqrt{10}, -\frac{2}{3}\sqrt{10}\right)$$

46 **Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto $P(3, 1, 4)$, así como la distancia entre el punto P y el plano dado.**

- Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por $P(3, 1, 4)$:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

- El punto que buscamos es el punto de corte de r y el plano:

$$(3 + \lambda) - (4 - \lambda) = 3$$

$$3 + \lambda - 4 + \lambda = 3 \rightarrow 2\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 2$$

El punto es $P'(5, 1, 2)$.

- La distancia entre P y el plano es igual a la distancia entre P y P':

$$dist\,(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(2, 0, -2)| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2{,}83 \text{ u}$$

47 **Se consideran los puntos $P(2, 1, -1)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(1, 3, 1)$:**

a) Comprueba que no están alineados y halla el área del triángulo que determinan.

b) Si desde el punto $V(1, 1, -1)$ se trazan rectas a cada uno de los puntos P, Q y R, se obtiene una pirámide. Halla la altura de dicha pirámide y su volumen.

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}(-1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PR}(-1, 2, 2) \end{array}\right\}$ No tienen las coordenadas proporcionales, luego los puntos no están alineados.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1) \rightarrow A_{\text{PARALELOGRAMO}} = |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \text{ u}^2$$

b) La altura es la distancia de V al plano determinado por P, Q y R.

Un vector normal al plano es $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 0, 1)$. La ecuación del plano es:

$$2(x - 2) + 1(z + 1) = 0$$

$$\pi: 2x + z - 3 = 0$$

$$\text{Altura} = dist\,(V, \pi) = \frac{|2 - 1 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ u}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}|\text{Área base} \cdot \text{altura}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \text{ u}^3$$

48 **Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.**

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

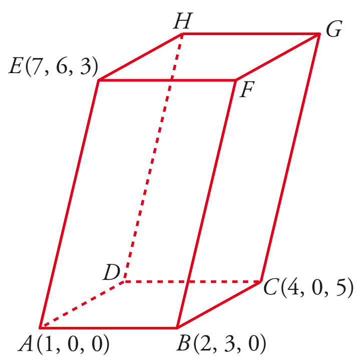
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$

$D(3, -3, 5)$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$

$F(8, 9, 3)$



- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5)$

  $G(10, 6, 8)$

  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5)$

  $H(9, 3, 8)$

$\overrightarrow{AB}(1, 3, 0),\ \overrightarrow{AD}(2, -3, 5),\ \overrightarrow{AE}(6, 6, 3)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$

49 **Dadas las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

determina su posición relativa y el área de uno de los cuadrados, dos de cuyos lados están sobre *r* y *s*.

- Escribimos la recta s en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z = 2 - x \\ -y - z = -4 - 3x \end{array}\right\} \text{ Sumando: } -2y = -2 - 4x \rightarrow y = 1 + 2x;\ z = 2 - x + y = 3 + x$$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

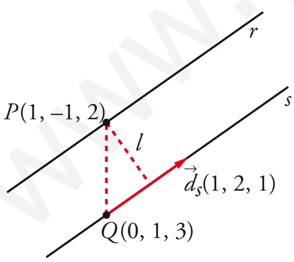
- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

  $\vec{d}_r(1, 2, 1);\ P(1, -1, 2)$

  $\vec{d}_s(1, 2, 1);\ Q(0, 1, 3)$

  Las rectas tienen la misma dirección; $P \in r$, pero $P \notin s$; luego las rectas r y s son paralelas.

- El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.



$\overrightarrow{QP}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{QP} \times \vec{d}_s = (1, -2, -1) \times (1, 2, 1) = (0, -2, 4)$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{|(0, -2, 4)|}{|(1, 2, 1)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 16}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \text{ u}$$

- El área del cuadrado es:

$$\text{Área} = \left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{10}{3} \text{ u}^2$$

50 **Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano α: $x - 3y + 2z + 12 = 0$.**

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano, π, perpendicular a α y que contiene a r.

$$P(1, 1, 2); \quad \vec{d}_r(2, 1, 2); \quad \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es:

$$8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0 \rightarrow \pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

51 **Considera las rectas r y s:**

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s.

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \overrightarrow{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

La perpendicular común es la recta que pasa por R y S:

$$\overrightarrow{RS}\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \vec{d}(0, 1, -1)$$

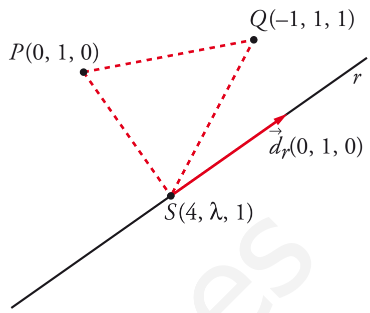
La recta es:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{6} + \lambda \\ z = -\frac{1}{6} - \lambda \end{cases}$$

52 **Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta r: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.**

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.



a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$; $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$

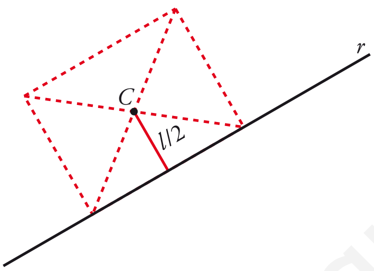
53 **Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:**

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π, que contiene a C y a r: $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.



$C(1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PC}(-1, 0, -2) \,//\, \pi$

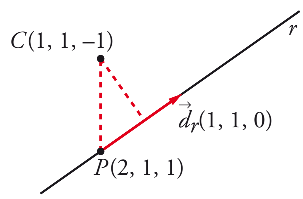
Un vector normal al plano es:

$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0 \rightarrow 2x - 2y - z - 1 = 0$

b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.



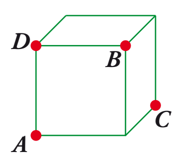
$\vec{d}_r \times \overrightarrow{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{d}_r| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$dist\,(C, r) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ u}$$

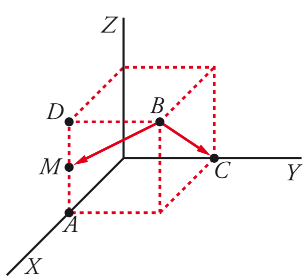
$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24 \text{ u}$$

54 **En la figura adjunta, calcula el ángulo que forma la recta BC con la recta que une B con el punto medio del lado AD.**



Vamos a considerar el cubo de lado 1 con un vértice en el origen:

Así: $A(1, 0, 0)$; $B(1, 1, 1)$; $C(0, 1, 0)$; $D(1, 0, 1)$; $M\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{BC}(-1, 0, -1)$; $\overrightarrow{BM}\left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BM}|} = \frac{1/2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5/4}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \rightarrow \alpha = 71°\ 33'\ 54''$$

55 **Sea la recta** $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por (0, 2, 2), y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

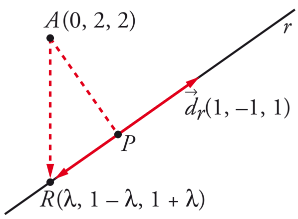
b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y a s, y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r, a s y a π.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \;\rightarrow\; z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 \;\rightarrow\; y = 1 - x \end{cases}\right\} \; r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.



$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r; es decir, $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$.

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; 3\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}\,(0, 1, 1) \;\rightarrow\; s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1)$; $P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \;\rightarrow\; \pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \;\rightarrow\; dist\,(Q, r) = dist\,(Q, s) = dist\,(Q, \pi) = dist\,(Q, P)$

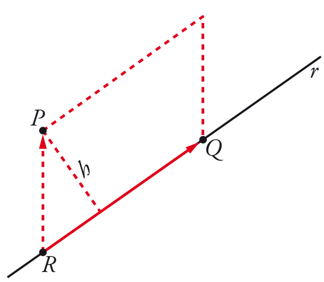
Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

56 **a) Halla la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.**

b) Encuentra todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R, de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

a) Si r es la recta que pasa por R y por Q, entonces:

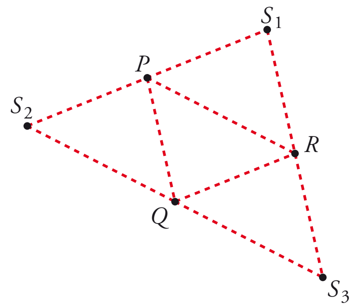
$$dist\,(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Bse}} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RQ}|}$$



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RP}(0, -1, 4) \\ \overrightarrow{RQ}(0, 2, 2) \end{array}\right\} \; \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{RQ} = (-10, 0, 0)$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|(-10, 0, 0)|}{|(0, 2, 2)|} = \frac{10}{\sqrt{4 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54 \text{ u}$$

b) Hay tres posibilidades: que P y Q no formen un lado del paralelogramo, que P y R no formen un lado o que Q y R no formen un lado.



- Si P y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_1(x, y, z)$:

  $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS_1} \rightarrow (0, -3, 2) = (x - 1, y, z + 1) \rightarrow S_1(1, -3, 1)$

- Si P y Q no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_2(a, b, c)$:

  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_2} \rightarrow (0, -1, 4) = (a - 1, b - 2, c - 1) \rightarrow S_2(1, 1, 5)$

- Si Q y R no forman un lado del paralelogramo, obtenemos $S_3(\alpha, \beta, \gamma)$:

  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS_3} \rightarrow (0, 3, -2) = (\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \rightarrow S_3(1, 3, -3)$

57 Halla el plano de la familia $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen de coordenadas.

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m+1)|}{\sqrt{m^2+1+1}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+2}} = 1 \text{ u}$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2+2} \rightarrow (m + 1)^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$

58 Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases}$ a los ejes coordenados.

Hallaremos el plano π que contiene a r y es paralelo a cada uno de los ejes de coordenadas.

$$r: \begin{cases} x - 3z - 3 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3 + 3\lambda,\ y = -1 + 4\lambda,\ z = \lambda$$

$$r: \begin{cases} \vec{d}_r(3, 4, 1) \\ P_r(3, -1, 0) \end{cases}$$

- Eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_{OX}(1, 0, 0) \\ P_{OX}(0, 0, 0) \end{array}\right\} \rightarrow \pi_x: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y - 4z + 1 = 0$$

$$dist\,(OX, r) = dist\,(OX, \pi_x) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1+16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \text{ u}$$

• Eje OY:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_{OY}(0,1,0)\\ P_{OY}(0,0,0)\end{array}\right\} \to \pi_y: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + 3z + 3 = 0$$

$$dist\,(OY, r) = dist\,(OY, \pi_y) = \frac{|0+0+3|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ u}$$

• Eje OZ:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{d}_{OZ}(0,0,1)\\ P_{OZ}(0,0,0)\end{array}\right\} \to \pi_z: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4x - 3y - 15 = 0$$

$$dist\,(OZ, r) = dist\,(OZ, \pi_z) = \frac{|0-0-15|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

59 **a) Determina el valor de a y b para que los tres planos se corten en una misma recta.**

$$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y - 2z = b \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

b) Halla el simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a los tres planos dados.

a) Para que los tres planos se corten en una recta, los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada tienen que ser iguales a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\,(A) = 2$, tiene que ser $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3a + 6 = 0 \to a = -2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Para que $ran\,(A') = 2$, añadimos al menor anterior la cuarta columna y el menor obtenido también tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3b - 6 = 0 \to b = 2$$

b) Para $a = -2$ y $b = 2$, el sistema es equivalente a:

$$r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \to x = \frac{4}{3} + \lambda,\ y = \frac{2}{3} + \lambda,\ z = \lambda$$

Calculamos el plano perpendicular a r que pasa por O.

$$\pi: x + y + z = 0$$

El punto de intersección $M = r \cap \pi$ es el punto medio entre O y su simétrico $O'(a, b, c)$ respecto de la recta.

$$r \cap \pi: \left(\frac{4}{3} + \lambda\right) + \left(\frac{2}{3} + \lambda\right) + \lambda = 0 \to \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$M = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \to O'\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$$

60 **Los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo, cuyo tercer vértice, C, está contenido en $r: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Si el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$, ¿cuáles pueden ser las coordenadas de C?**

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$

$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = 1$

El punto $C(2\lambda, \lambda, 1)$

$\overrightarrow{AC}\ (2\lambda, \lambda, 1)$

La expresión $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$ nos da el área del triángulo que forman los tres puntos.

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1, 1, 1) \times (2\lambda, \lambda, 1)|}{2} = \frac{|(1 - \lambda, 2\lambda - 1, -\lambda)|}{2} = \frac{\sqrt{(1-\lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + (-\lambda)^2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sqrt{6\lambda^2 - 6\lambda + 2} = \sqrt{2} \rightarrow \lambda = 1,\ \lambda = 0$$

Los puntos son $C(2, 1, 1)$ y $C'(0, 0, 1)$.

61 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que equidistan de los puntos $A(1, -1, 0)$ y $B(2, 3, -4)$. Comprueba que obtienes un plano perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio de AB.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, A) = dist\,(P, B) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} + 2y + 1 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} + 8z + 16$$

$\pi: 2x + 8y - 8z - 27 = 0 \rightarrow$ Ecuación de un plano.

- Veamos que π es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$:

  $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -4)$

  Vector normal al plano $\rightarrow \vec{n}\,(2, 8, -8) \,//\, \overrightarrow{AB}$

  Luego $\overrightarrow{AB} \perp \pi$.

- Comprobamos que π pasa por el punto medio de AB:

  $$M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{0-4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1, -2\right)$$

  $$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 8 \cdot 1 - 8 \cdot (-2) - 27 = 0 \rightarrow M \in \pi$$

El plano π es el *plano mediador del segmento* AB.

62 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos $\alpha: 3x + y - 2z + 1 = 0$ y $\beta: x - 3y + 2z - 3 = 0$.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$dist\,(P, \alpha) = dist\,(P, \beta) \rightarrow \frac{|3x + y - 2z + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|x - 3y + 2z - 3|}{\sqrt{1 + 9 + 4}}$$

$|3x + y - 2z + 1| = |x - 3y + 2z - 3| \rightarrow$

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 1 = x - 3y + 2z - 3 \rightarrow 2x + 4y - 4z + 4 = 0 \rightarrow x + 2y - 2z + 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = -x + 3y - 2z + 3 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Son los *planos bisectores del diedro que determinan* α *y* β.

63 **Halla las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x = y$ que distan 1 del plano $2x - y + 2z = 2$.**

Si P es un punto del plano $x = y$, entonces es de la forma $P(x, y, z)$. La distancia de P al plano dado ha de ser igual a 1, es decir:

$$\frac{|2x - x + 2z - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|x + 2z - 2|}{3} = 1 \to |x + 2z - 2| = 3 \begin{cases} x + 2z - 2 = 3 \to x + 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = -3 \to x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas:

$$r: \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

64 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:**

$$\alpha: 3x - 4y + 5 = 0 \qquad \beta: 2x - 2y + z + 9 = 0$$

b) ¿Qué puntos del eje Y equidistan de ambos planos?

a) Si $P(x, y, z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \to \frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$$

$$\begin{cases} 9x - 12y + 15 = 10x - 10y + 5z + 45 \to x + 2y + 5z + 30 = 0 \\ 9x - 12y + 15 = -10x + 10y - 5z - 45 \to 19x - 22y + 5z + 60 = 0 \end{cases}$$

Son *los planos bisectores* del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY es de la forma $Q(0, y, 0)$. La distancia de Q a cada uno de los planos ha de ser la misma, es decir:

$$\frac{|-4y + 5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-2y + 9|}{\sqrt{4+4+1}} \to \frac{|-4y + 5|}{5} = \frac{|-2y + 9|}{3}$$

$$3|-4y + 5| = 5|-2y + 9| \begin{cases} -12y + 15 = -10y + 45 \to -2y = 30 \to y = -15 \\ -12y + 15 = 10y - 45 \to -22y = -60 \to y = \dfrac{30}{11} \end{cases}$$

Hay dos puntos:

$$Q_1(0, -15, 0) \text{ y } Q_2\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$$

65 **Calcula el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a la misma distancia de $P(-1, 2, 5)$ y $Q(-3, 4, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra el punto P de dicho conjunto?**

Si $A(x, y, z)$ es un punto del conjunto, su distancia a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$dist\,(A, P) = dist\,(A, Q) \to$

$$\to \sqrt{(x - + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2} \to$$

$$\to \cancel{x^2} + 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 10z + 25 = \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \to$$

$$\to -4x + 4y - 8z + 4 = 0 \to \pi: x - y + 2z - 1 = 0$$

Es el *plano mediador* del segmento que une P y Q.

La distancia de P a dicho plano será igual a la mitad de la distancia entre P y Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, -4)| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \to$$

$$\to dist\,(P, \pi) = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \text{ u}$$

66 **a) Halla la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ en el punto $P(1, 2, 1)$.**

b) ¿Cuál es el punto diametralmente opuesto a P en la esfera dada?

a) El punto P es un punto de la esfera.

El centro de la esfera es $C(1, 2, 0)$.

El plano que buscamos pasa por P y es perpendicular al vector $\overrightarrow{CP}\,(0, 0, 1)$.

Su ecuación es:

$$0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0, \text{ es decir: } z - 1 = 0$$

b) Es el simétrico de P respecto del centro de la esfera.

Si llamamos $P'(x, y, z)$ al punto que buscamos, C es el punto medio del segmento PP', es decir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (1, 2, 0) \rightarrow P'(1, 2, -1)$$

67 **Halla la ecuación de la esfera tangente a los planos $x - 2z - 8 = 0$ y $2x - z + 5 = 0$ y cuyo centro pertenece a la recta:**

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

El centro de la esfera es de la forma $C(-2, 0, z)$ (pues pertenece a la recta r).

La distancia del centro a cada uno de los planos es la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$\frac{|-2 - 2z - 8|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-4 - z + 5|}{\sqrt{4+1}} \rightarrow \frac{|-2z - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|-z + 1|}{\sqrt{5}} \rightarrow |-2z - 10| =$$

$$= |-z + 1| \begin{cases} -2z - 10 = -z + 1 \rightarrow z = -11 \rightarrow C_1(-2, 0, -11) \\ -2x - 10 = z - 1 \rightarrow -3z = 9 \rightarrow z = -3 \rightarrow C_2(-2, 0, -3) \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- $C_1(-2, 0, -11) \rightarrow \text{Radio} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$

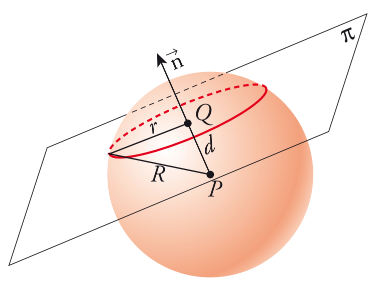
  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 11)^2 = \dfrac{144}{5}$

- $C_2(-2, 0, -3) \rightarrow \text{Radio} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

  Ecuación: $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{16}{5}$

68 **La esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ corta al plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ en una circunferencia.**

Halla su centro y su radio.



- Obtengamos el centro de la circunferencia:

  — El centro de la esfera es $P(3, -2, 1)$.

  — La recta que pasa por P y es perpendicular al plano es:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

  — El punto de corte de esta recta con el plano dado es el centro de la circunferencia:

$$2(3 + 2\lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 2 = 0$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$Q(1, 0, 0)$$

- Calculamos el radio de la circunferencia:

  La distancia entre los centros P y Q es:

  $$d = |\overrightarrow{QP}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

  El radio de la esfera es $R = 5$.

  Luego el radio de la circunferencia es:

  $$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

69 **a) Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $A(4, 1, -3)$ y $B(3, 2, 1)$ y que tiene su centro en la recta $\dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{-1}$.**

b) ¿Cuál es la ecuación del plano tangente en B a dicha esfera?

a) Escribimos la recta en paramétricas:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Como el centro pertenece a esta recta, es de la forma $C(8 + 2\lambda, 3 + \lambda, -4 - \lambda)$.

La distancia de C a los puntos A y B ha de ser la misma. Además, esta distancia es el radio de la esfera:

$$dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

$$|(2\lambda + 4, \lambda + 2, -\lambda - 1)| = |(2\lambda + 5, \lambda + 1, -\lambda - 5)|$$

$$\sqrt{(2\lambda+4)^2 + (\lambda+2)^2 + (-\lambda-1)^2} = \sqrt{(2\lambda+5)^2 + (\lambda+1)^2 + (-\lambda-5)^2}$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16 + 16\lambda + \cancel{\lambda^2} + 4 + 4\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda = \cancel{4\lambda^2} + 25 + 20\lambda + \cancel{\lambda^2} + 1 + 2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 25 + 10\lambda$$

$$-10\lambda = 30 \;\rightarrow\; \lambda = -3 \;\rightarrow\; C(2, 0, -1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 3 = \text{radio de la esfera}$$

La ecuación es:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9, \text{ o bien: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$$

b) Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CB} = (1, 2, 2)$.

El plano pasa por $B(3, 2, 1)$. Su ecuación es:

$$1 \cdot (x-3) + 2 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-1) = 0$$

$$x - 3 + 2y - 4 + 2z - 2 = 0$$

$$x + 2y + 2z - 9 = 0$$

70 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (2, 0, 0) y (–2, 0, 0) sea igual a 6.**

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 = 36 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 8x + 36 \;\rightarrow\; 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2 + z^2} = 2x + 9$$

$$9[x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2] = 4x^2 + 36x + 81 \;\rightarrow\; 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 + 9z^2 = 4x^2 + 36x + 81$$

$$5x^2 + 9y^2 + 9z^2 = 45 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$$

Es un *elipsoide*.

71 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de (0, 0, 3) y del plano $z = -3$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del lugar geométrico pedido. Entonces:

$$dist = (P, (0, 0, 3)) = dist\ (P, \{z = -3\})$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} = \frac{|z+3|}{\sqrt{1}} = |z+3|$$

Por tanto:

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = (z+3)^2$$

$$x^2 + y^2 + \cancel{z^2} - 6z + \cancel{9} = \cancel{z^2} + 6z + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 - 12z = 0$$

Se trata de un *paraboloide*.

72 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a (0, 5, 0) y (0, –5, 0) sea igual a 4.

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico:

$$\left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2 + z^2}\right| = 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$x^2 + y^2 - 10y + 25 + z^2 = 16 + x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2 \pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2}$$

$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 20y + 16$$

$$\pm 2\sqrt{x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2} = 5y + 4$$

$$4(x^2 + y^2 + 10y + 25 + z^2) = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 + 4y^2 + 40y + 100 + 4z^2 = 25y^2 + 40y + 16$$

$$4x^2 - 21y^2 + 4z^2 = -84$$

$$-\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{21} = 1$$

Es un *hiperboloide*.

73 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los puntos (2, 3, 4) y (2, 3, –4) es igual a 8?

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

$$\cancel{(x-2)^2} + (y-3)^2 + \cancel{(z-4)^2} = 64 + \cancel{(x-2)^2} + (y+3)^2 + \cancel{(z-4)^2} -$$

$$-16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2}$$

$$16\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 64 + 12y$$

$$4\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 16 + 3y$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16) = 256 + 96y + 9y^2$$

$$16x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 64x - 128z + 208 = 0$$

Se trata de un *elipsoide*.

74 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del plano $x = y$ y del punto $(0, -2, 1)$.**

$dist\,(P, \pi) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{2}}$

$dist\,(P, Q) = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}$

$\left(\dfrac{|x - y|}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$

$x^2 + y^2 - 2xy = 2x^2 + 2y^2 + 8y + 8 + 2z^2 - 4z + 2$

$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 8y - 4z + 10 = 0$

Se trata de un *paraboloide*.

Cuestiones teóricas

75 **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) La ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano:

I) Si $a = 0$ y $b = 0$ el plano es perpendicular al plano XY.

II) Si $b = 0$ y $c = 0$ el plano es paralelo al plano YZ.

III) Si $a = 0$ y $c = 0$ el plano es perpendicular al eje Y.

b) Si $P \in r$ hay infinitas rectas perpendiculares a r que pasan por P.

c) No es posible calcular la distancia entre el plano $x + y - 2z - 5 = 0$ y la recta $x = y = z$.

d) El punto $P'(2, 6, -3)$ es el simétrico de $P(-1, 3, 3)$ respecto del plano $x + y - 2z - 5 = 0$.

e) No es posible hallar el punto de corte de las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \qquad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z}{4}$$

f) La distancia entre los planos $\alpha: x + y - z = 1$ y $\beta: \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 1 - t \\ z = 2 \quad + s \end{cases}$ es igual a $\sqrt{3}$ u.

g) El plano $2x + y + z = 2$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$ u².

h) Si $A(x_1, y_1, z_1)$ es un punto que está contenido en el plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es un punto tal que $\overrightarrow{AB} \cdot (a, b, c) = 0$, entonces $B \in \pi$.

a) I) Falso, pues el plano es perpendicular a $(0, 0, 1)$, que es la dirección del eje OZ, y es paralelo al plano XY, no perpendicular.

II) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(1, 0, 0)$, que es la dirección del eje OX, y es paralelo al plano YZ.

III) Verdadero, pues el plano es perpendicular a $(0, 1, 0)$, que es la dirección del eje OY.

b) Verdadero, todas las rectas del plano π perpendicular a r que pasan por P verifican la condición.

c) Falso, siempre es posible calcular la distancia entre un plano y una recta.

En este caso, como $\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{d_r} = (1, 1, -2) \cdot (1, 1, 1) = 0$ y el punto $(0, 0, 0)$ de la recta no está en el plano, $r \,//\, \pi$.

La distancia $dist\,(r, \pi)$ es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$dist\,(O, \pi) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \dfrac{5}{6}\sqrt{6}$ u

d) $\overrightarrow{PP'} = (2, 6, -3) - (-1, 3, 3) = (3, 3, -6) = 3(1, 1, 2) \ \to \ \overrightarrow{PP'} \perp \pi$

El punto medio es $M = \left(\dfrac{2-1}{2}, \dfrac{6+3}{2}, \dfrac{-3+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{2}, 0\right)$

Sustituimos las coordenadas de M en π:

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 5 = 0 \ \to \ M \in \pi$$

Luego el segmento PP' es perpendicular a π y lo corta en su punto medio. La afirmación es verdadera.

e) $r: \begin{cases} \vec{d}_r(2, -3, 3) \\ P_r\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \vec{d}_s(-2, 1, 4) \\ P_s\left(3, \dfrac{-3}{2}, 0\right) \end{cases}$

$\overrightarrow{P_rP_s} = \left(3, \dfrac{-3}{2}, 0\right) - \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \left(2, -2, -\dfrac{3}{2}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3/2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \ \to$ Verdadero, las rectas se cruzan.

f) $\vec{n}_\beta = (1, -1, 0) \times (1, 0, 1) = -(1, 1, -1) = -\vec{n}_\alpha \ \to$ Los planos son paralelos.

$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ \beta: z - y - x = 0$

$dist\,(\alpha, \beta) = |dist\,(O, \alpha) - dist\,(O, \beta)| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 0\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ u

Falso, la distancia es $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ u.

g) $A = OX \cap \pi = (1, 0, 0)$

$B = OY \cap \pi = (0, 2, 0)$

$C = OZ \cap \pi = (0, 0, 2)$

$\overrightarrow{AB}\,(-1, 2, 0)$; $\overrightarrow{AC}\,(-1, 0, 2)$

Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{|(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 2)|}{2} = \dfrac{|(4, 2, 2)|}{2} = \dfrac{\sqrt{16+4+4}}{2} = \sqrt{6}$ u^2

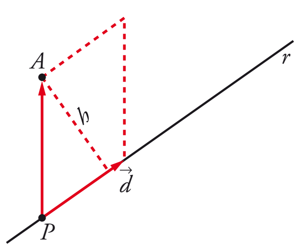
Verdadero.

h) Verdadero, porque $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_\pi$.

Si $A \in \pi$, todo vector con origen en A y perpendicular al vector normal al plano tiene su extremo en π, luego $B \in \pi$.

76 Justifica que la distancia del punto $A(x_2, y_2, z_2)$ a la recta $r: \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c}$ es:

$$dist\,(A, r) = \frac{|(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \times (a, b, c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Llamamos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{d}\,(a, b, c)$. P es un punto de la recta y $\vec{d}$ un vector dirección de esta.

La distancia de A a la recta r es igual a la altura del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{PA}$ y $\vec{d}$, es decir:

$dist\,(A, r) = \dfrac{\text{Área paralelogramo}}{\text{Base}} = \dfrac{|\overrightarrow{PA} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|} = \dfrac{|(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

77 **Sean r la recta determinada por el punto A y el vector director $\vec{d}_r$ y s la recta determinada por B y $\vec{d}_s$. Si suponemos que r y s se cruzan:**

a) Justifica la igualdad $\boldsymbol{dist(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}}$.

b) Justifica que la perpedicular común a r y a s se puede obtener así:

$$\boldsymbol{\begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}}$$

a) $dist\,(r, s)$ = altura del paralelepípedo determinado por:

$$\overrightarrow{AB},\ \vec{d}_r \ \text{ y } \ \vec{d}_s = \frac{\text{Volumen}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}$$

b) La recta, p, perpendicular a r y a s, tiene por vector dirección $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$. Esta recta, p, es la intersección de los planos α y β, siendo:

α: Plano que contiene a s y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

α: $det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$, donde $X = (x, y, z)$

β: Plano que contiene a r y al vector $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$; es decir:

β: $det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0$

Por tanto, $p: \begin{cases} det\,(\overrightarrow{AX}, \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \\ det\,(\overrightarrow{BX}, \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s) = 0 \end{cases}$

78 **Comprueba que los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$ forman un triángulo isósceles.**

$dist\,(A, B) = \sqrt{(2 - \lambda)^2 + (-\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

$dist\,(A, C) = \sqrt{(\lambda - \lambda)^2 + (-2)^2 + (\lambda + 2 - \lambda)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist\,(B, C) = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + (-\lambda)^2 + (\lambda + 2)^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 8}$

Los lados AB y BC miden lo mismo, luego el triángulo es isósceles.

Página 199

Para profundizar

79 **Los puntos $P(1, -1, 1)$ y $Q(3, -3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado. Sabemos que dicho cuadrado está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.**

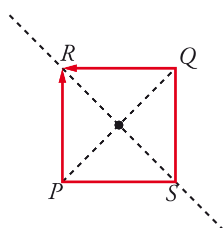
a) Halla los vértices restantes.

b) Calcula el perímetro del cuadrado.

a) Los otros dos vértices, R y S, pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.

La mediatriz del segmento PQ tiene como vector dirección el vector normal al plano $x + y = 0$; es decir, $(1, 1, 0)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ; es decir, por $M(2, -2, 2)$. Luego la ecuación de la mediatriz es:



$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Un punto de r es de la forma $R(2 + \lambda, -2 + \lambda, 2)$.

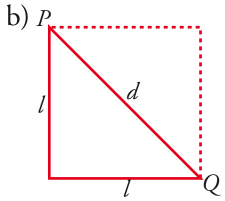
Buscamos R tal que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$ (es decir $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}(1+\lambda, -1+\lambda, 1) \\ \overrightarrow{QR}(-1+\lambda, 1+\lambda, -1) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = \lambda^2 - 1 + \lambda^2 - 1 - 1 = 2\lambda^2 - 3 = 0 \quad \begin{array}{l} \lambda = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \lambda = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

Los vértices son: $R\left(\dfrac{4+\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4+\sqrt{6}}{2}, 2\right)$ y $S\left(\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{-4-\sqrt{6}}{2}, 2\right)$

b)



La longitud de la diagonal es:

$d = |\overrightarrow{PQ}| = |(2, -2, 2)| = \sqrt{12}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow 12 = 2l^2 \rightarrow l = \sqrt{6}$

El perímetro será: $P = 4\sqrt{6}$ u

80 Considera las rectas *r*, *s* y *t* siguientes:

$$r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 - \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

Halla un punto *P* que esté en la recta *t* y tal que el plano que determina con la recta *s* contenga a la recta *r*.

$P \in t \rightarrow P = (\gamma, -1-\gamma, \gamma)$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r}(0, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 0) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{d_s}(1, -1, -2) \\ P_s(0, 0, -2) \end{cases}$$

$\overrightarrow{P_sP}\ (\gamma, -1-\gamma, \gamma+2)$

π: plano que contiene a P y a s

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & -2 \\ \gamma & -1-\gamma & \gamma+2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: (4+3\gamma)x + (2+3\gamma)y + z + 2 = 0$$

Calculamos el valor de γ para que $P_r \in \pi$:

$$P_r \in \pi \rightarrow (4+3\gamma) \cdot (-2) + 2 = 0 \rightarrow -8 - 6\gamma + 2 = 0 \rightarrow \gamma = -1$$

La condición para que $r \subset \pi$ es que $\overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0$.

$$\overrightarrow{n_\pi} = (3+2\gamma, \gamma, -\gamma) = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (0, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

Luego $r \subset \pi$.

El punto pedido es $P(-1, 0, -1)$.

81 **Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ con los tres planos coordenados. ¿Qué figura obtienes? ¿Cómo se llama la superficie dada?**

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 4 y 3.

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 3.

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 5 y 4.

Es un *elipsoide*.

82 **Halla el centro y las longitudes de los ejes del elipsoide siguiente:**

$$\mathbf{2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0}$$

$2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$

$2(x^2-4x+4)+3(y^2+2y+1)+(z^2-4z+4)=3+8+3+4$

$2(x-2)^2+3(y+1)^2+(z-2)^2=18$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{6}-\frac{(z-2)^2}{18}=1$$

Centro: $(2, -1, 2)$

Semiejes: 3, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

83 **Halla las intersecciones de la superficie $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ con los planos coordenados, y describe qué tipo de curvas obtienes. ¿Cómo se llama la superficie dada?**

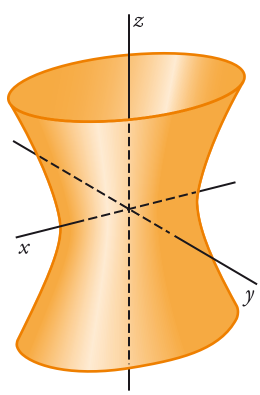
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$$

Con $x = 0$: $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 2.

Con $y = 0$: $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1 \rightarrow$ *Hipérbola, semieje real* 3.

Con $z = 0$: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow$ *Elipse de semiejes* 3 y 2.

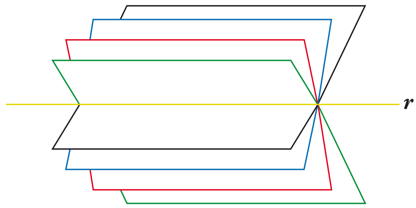
Es un *hiperboloide*.



84 Haz de planos

La recta $r: \begin{cases} \pi: 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ \sigma: \ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ es la intersección de los planos π y σ.
El conjunto de todos los planos que contienen a r se llama *HAZ DE PLANOS* de arista r, y su expresión analítica es:

$$a(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$$



Para cada par de valores de a y b (salvo para $a = 0$ y $b = 0$), se obtiene la ecuación de un plano del haz.

a) Halla el plano del haz que pasa por el origen de coordenadas.

b) ¿Para qué valor de k uno de los planos del haz es perpendicular a la recta $t: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z}{k}$? ¿Cuál es ese plano?

c) Halla dos puntos que pertenezcan a todos los planos del haz anterior.

d) Escribe la expresión del haz de planos cuya arista es la recta $s: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$.

e) ¿Cuál de los planos de este haz dista más del origen de coordenadas?

a) El término independiente será cero: $-4a + b = 0 \ \rightarrow \ b = 4a$. Luego:

$a(2x + 3y - z - 4) + 4a(x - 2y + z + 1) = 0$; es decir:

$2x + 3y - z - 4 + 4(x - 2y + z + 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 + 4x - 8y + 4z + 4 = 0$

$6x - 5y + 3z = 0$

b) Un plano del haz es:

$(2a + b)x + (3a - 2b)y + (-a + b)z + (-4a + b) = 0$

Un vector normal al plano es:

$\vec{n}(2a + b, 3a - 2b, -a + b)$

Para que el plano sea perpendicular a la recta, el vector normal del plano y el vector dirección de la recta han de ser paralelos, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales:

$$\frac{2a+b}{3} = \frac{3a-2b}{5} = \frac{-a+b}{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10a + 5b = 9a - 6b \\ 2ka + kb = -3a + 3b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a + 11b = 0 \ \rightarrow \ a = -11b \\ (2k+3)a + (k-3)b = 0 \end{array}$$

$-11(2k + 3) + (k - 3) = 0 \ \rightarrow \ -22k - 33 + k - 3 = 0$

$-21k - 36 = 0 \ \rightarrow \ k = \dfrac{-36}{21} = \dfrac{-12}{7} \ \rightarrow \ k = \dfrac{-12}{7}$

El plano del haz es:

$-11b(2x + 3y - z - 4) + b(x - 2y + z + 1) = 0$

$-11(2x + 3y - z - 4) + (x - 2y + z + 1) = 0$

$-22x - 33y + 11z + 44 + x - 2y + z + 1 = 0$

$-21x - 35y + 12z + 45 = 0$

Otra resolución:

Si la recta es perpendicular a un cierto plano del haz, será perpendicular a todas las rectas contenidas en ese plano, y, en concreto, a la recta r, arista del haz.

Vector dirección de r: $\vec{d} = (2, 3, -1) \times (1, -2, 1) = (1, -3, -7)$

Vector dirección de t: $\vec{d'} = (3, 5, k)$

$$\vec{d} \cdot \vec{d'} = 0 \;\rightarrow\; (1, -3, -7) \cdot (3, 5, k) = 3 - 15 - 7k = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{-12}{7}$$

A partir de aquí, obtendríamos la relación entre a y b, y el plano del haz como en el caso anterior.

c) Los puntos que pertenecen a todos los planos del haz son los puntos de la recta r. Por ejemplo: $(1, 0, -2)$ y $(0, 3, 5)$.

d) Escribimos la recta s en forma implícita:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} \;\rightarrow\; -2x + 10 = 3y + 3 \;\rightarrow\; -2x - 3y + 7 = 0$$

$$\frac{x-5}{3} = \frac{z-3}{1} \;\rightarrow\; x - 5 = 3z - 9 \;\rightarrow\; x - 3z + 4 = 0$$

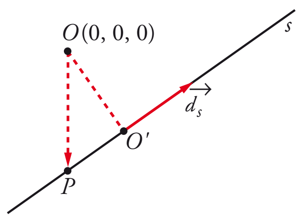
$$s: \begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La expresión del haz de planos cuya arista es s es:

$$a(2x + 3y - 7) + b(x - 3z + 4) = 0$$

e) Es el plano que contiene a la recta (puesto que es del haz) y es perpendicular a $\overrightarrow{OO'}$, siendo $O(0, 0, 0)$ y O' la proyección de O sobre la recta.

Lo calculamos en el caso de la recta s:



Un punto genérico de la recta s es:

$$P(5 + 3\lambda, -1 - 2\lambda, 3 + \lambda)$$

Un vector dirección de s es $\vec{d_s}(3, -2, 1)$.

El vector $\overrightarrow{OP}$ ha de ser perpendicular a $\vec{d_s}$:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{d_s} = 0 \;\rightarrow\; 3(5 + 3\lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (3 + \lambda) = 0$$

$$15 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; 14\lambda + 20 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{-20}{14} = \frac{-10}{7}$$

Luego:

$O'\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; y el vector normal al plano es $\overrightarrow{OO'}\left(\frac{5}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$; o bien $(5, 13, 11)$.

El plano será:

$$5\left(x - \frac{5}{7}\right) + 13\left(y - \frac{13}{7}\right) + 11\left(z - \frac{11}{7}\right) = 0 \;\rightarrow\; 5x + 13y + 11z - 45 = 0$$

Autoevaluación

Página 199

1 **a) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano que pasa por $P(1, -1, -2)$ y es paralelo al plano π: $x + 2y + 3z + 6 = 0$.**

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

c) ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por A y P con π?

a) π': $x + 2y + 3z + k = 0$

$P \in \pi' \;\rightarrow\; 1 - 2 - 6 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 7 \;\rightarrow\; \pi'$: $x + 2y + 3z + 7 = 0$

$$dist\,(A, \pi') = \frac{|1 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{4}{7}\sqrt{2}\,\sqrt{7} \text{ u}$$

b) $A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de π.

r: recta perpendicular a π que pasa por A.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi \;\rightarrow\; (1 + \lambda) + 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -\frac{1}{2}$$

$M\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de M.

$$\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \;\rightarrow\; x = 0,\; y = -2,\; z = -3 \;\rightarrow\; A' = (0, -2, -3)$$

c) $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$

$\vec{d}\,(0, -1, -2)$

$$sen\;\widehat{(s, \pi)} = \frac{|(0, -1, -2) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{5}\,\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{35}}\sqrt{2} \;\rightarrow\; \widehat{(s, \pi)} = arc\;sen\,\frac{3}{\sqrt{35}}\sqrt{2}$$

2 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$.**

b) Comprueba que el plano que obtienes, π, es perpendicular al segmento PQ en su punto medio.

c) El plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.

d) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y O (origen de coordenadas).

a) $A(x, y, z)$: punto genérico.

$dist\,(A, P) = dist\,(A, Q)$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2}$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = (x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59) = 0$$

$$-4x + 12y - 8z - 24 = 0$$

Es un plano:

$$\pi: -x + 3y - 2z - 6 = 0$$

b) $\overrightarrow{n_\pi}(-1, 3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 7, -1) - (5, 1, 3) = (-2, 6, -4) = 2(-1, 3, -2) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow \pi \perp \overrightarrow{PQ}$

$M = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) = (4, 4, 1)$

Sustituimos las coordenadas de M en π:

$-4 + 12 - 2 - 6 = 0 \rightarrow M \in \pi$

Luego π es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

c) $A(-6, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -3)$

$\overrightarrow{AB}(6, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC}(6, 0, -3)$

Área $= \frac{1}{2}|(6, 2, 0) \times (6, 0, -3)| = \frac{1}{2}|(-6, 18, -12)| = \frac{6}{2}|(-1, 3, -2)| = 3\sqrt{1+9+4} = 3\sqrt{14}$ u^2

d) $\overrightarrow{OA}(-6, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB}(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{OC}(0, 0, -3)$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \text{ u}^3$$

3 Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuación:

$x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

Buscamos un punto M de la recta de manera que el vector $\overrightarrow{AM}$ sea perpendicular al vector dirección de r.

Un punto de r es de la forma $(1, -3, -1) + \lambda(1, 2, 2) = (1 + \lambda, -3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

$\overrightarrow{AM}(4 + \lambda, -4 + 2\lambda, -7 + 2\lambda)$

El vector dirección de la recta es $(1, 2, 2)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{d_r} = 4 + \lambda - 8 + 4\lambda - 14 + 4\lambda = -18 + 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$

El punto M es $(3, 1, 3)$.

Buscamos un punto $A'(\alpha, \beta, \gamma)$ simétrico de A respecto de M:

$A' = M + \overrightarrow{AM} = (3, 1, 3) + (6, 0, -3) = (9, 1, 0)$

4 Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \qquad \pi: 3x + 4y - 6 = 0$$

a) Comprueba que son paralelos y calcula *dist*(r, π).

b) Halla las ecuaciones de dos rectas distintas que estén contenidas en π y que sean paralelas a r y calcula la distancia entre ellas.

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r}(-4, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$

$\pi: 3x + 4y - 6 = 0$

$\overrightarrow{d_r}(-4, 3, 1)$, $\overrightarrow{n_\pi}(3, 4, 0)$

$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 \rightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow r \parallel \pi$

$dist(r, \pi) = dist(P_r, \pi) = \left|\frac{3 + 8 - 6}{5}\right| = 1$ u

b) Tomamos dos puntos de π distintos, P y P'.

$$s: \begin{cases} \vec{d}_s = \vec{d}_r = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} \vec{d}_t = \vec{d}_r = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 2) \end{cases}$$

$$dist\,(s,\, t) = dist\,(P,\, t) = \frac{|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|} = \frac{|(0, 0, 1) \times (-4, 3, 1)|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{|(-3, -4, 0)|}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ u}$$

5 Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$**:**

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r **y a** s**.**

b) Calcula la distancia entre r **y** s**.**

a) $\vec{d}_r\,(2, -1, 1)$; $\vec{d}_s = (2, -1, 1) \times (1, 0, 3) = (-3, -5, 1)$

Por tanto, si llamamos t a la recta que buscamos:

$$\vec{d}_t = (2, -1, 1) \times (-3, -5, 1) = (4, -5, -13)$$

Plano α que contiene a t y a r:

$$\left.\begin{array}{l} P(3, 5, 4) \\ \vec{d}_r(2, -1, 1) \\ \vec{d}_t(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \alpha: \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 4 \\ y-5 & -1 & -5 \\ z-4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \alpha: 3x + 5y - z - 30 = 0$$

Plano β que contiene a t y a s:

Hallamos primero un punto de s haciendo $x = 0$ en las ecuaciones de s:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z + 4 = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} z = 0 \\ y = 4 \end{cases} \to Q(0, 4, 0)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} Q(0, 4, 0) \\ \vec{d}_s(-3, -5, 1) \\ \vec{d}_t(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \beta: \begin{vmatrix} x & -3 & 4 \\ y-4 & -5 & -5 \\ z & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: 2x - y + z + 4 = 0$$

La recta t es:

$$t: \begin{cases} 3x + 5y - z - 30 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P, y un vector director, $\vec{d}_s$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(0, 4, 0) \in s \qquad \vec{d}_s\,(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d}_r$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r:

$$Q(3, 5, 4) \in r;\ \vec{d}_r\,(2, -1, 1)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}\,(3, 1, 4)$

$$dist\,(r, s) = \frac{|[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}]|}{\vec{d}_r \times \vec{d}_s}$$

$$[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -45$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = |-4, 5, 13| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 13^2} = \sqrt{210}$$

$$dist\,(r, s) = \frac{|-45|}{\sqrt{210}} = \frac{45}{\sqrt{210}} = \frac{3\sqrt{210}}{14} \text{ u}$$

6 a) Halla el centro y el radio de esta esfera:

$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$

b) Calcula el radio de la circunferencia que determina el plano $3x - 4z + 5 = 0$ al cortar a S.

a) Completamos cuadrados en la ecuación de la esfera:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5^2$$

Por tanto, el *radio* es 5, y el *centro*, $C(2, 0, -1)$.

b) Hallamos la distancia del centro de la esfera al plano $\pi: 3x - 4z + 5 = 0$:

$$dist\,(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ u}$$

Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ u}$$