ECUACIONES DE LA RECTA

1 **Hallar tres puntos distintos de la recta:**

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{1}$$

SOLUCIÓN:

La recta pasa por el punto P(1,-3,0) y tiene como vector director $\vec{u} = (2,0,1)$.

Por tanto, cualquier punto Q de la recta es de la forma $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{u}$, siendo $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OP}$ los vectores de posición de los puntos Q y P respectivamente:

$$(x, y, z) = (1, -3, 0) + t \cdot (2,0,1)$$

Dando valores arbitrarios a t vamos obteniendo puntos de r:

Para t = 1: $\overrightarrow{OQ}$ = (3, -3, 1) $\rightarrow$ Q = (3, -3, 1)

Para t = -1: $\overrightarrow{OQ}$ = (-1, -3, -1) $\rightarrow$ Q = (-1, -3, -1)

2 **Ecuaciones de la recta que pasa por A(2, -1, 1) y B(-2,3, 7)**

SOLUCIÓN:

La recta pasa por el punto A y B es la recta que pasa por A (o por el punto B) y tiene como vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 6)$ (o un vector proporcional a $\overrightarrow{AB}$, por ejemplo, (-2,2,3)

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow x-2 = -y-1 \rightarrow x+y-1=0 \\ \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{z-1}{3} \rightarrow 3x-6 = -2z+2 \rightarrow 3x+2z-8=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+2z-8=0 \end{cases}$

3 **Dada la recta r en forma en forma paramétricas:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

a) Halla un punto de la recta y un vector director de la misma.

b) Expresar la recta en forma continua.

SOLUCIÓN:

a) La recta pasa por el punto A(2, 5, 3).

Un vector director de r es $\vec{u}$ = (-1, 1, -6).

b) Teniendo un punto y un vector director, la ecuación en forma continua es: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-3}{-6}$

4 **¿Es posible que dos determinaciones lineales distintas representen la misma recta? Razona tu respuesta**

SOLUCIÓN:

Sea la recta determinada por $(A, \vec{u})$ y por $(B, \vec{v})$, estas dos determinaciones lineales de la recta representan la misma recta si:

$$\text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 1$$

5	**Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 3, 4) y B(8, -2, 3). Estudiar si el punto C(2, 1, 3) está alineado con A y B.**

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta que pasa por A y B es:

Si $\overrightarrow{AB} = (6, -5, -1) \rightarrow \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-4}{-1}$

El punto C está alineado con A y B si pertenece a la recta, es decir, si verifica sus ecuaciones:

$$\frac{2-2}{6} \neq \frac{1-3}{-5} \neq \frac{3-4}{-1}$$

Por tanto, C no está alineado con A y B.

6	**Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r:** $$r \equiv \begin{cases} -x+2y+4z-1=0 \\ 2x-4y+3z+2=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Consideramos la matriz de los coeficientes del sistema: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \rightarrow$ Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 2y+4z=1+x \\ -4y+3z=-2-2x \end{cases}$

Obtenemos por la regla de Cramer los valores de y, z en función de x:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1+x & 4 \\ -2-2x & 3 \end{vmatrix}}{22} = \frac{3+3x+8+8x}{22} = \frac{1+x}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+x \\ -4 & -2-2x \end{vmatrix}}{22} = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} y = \frac{1+x}{2} \rightarrow 2y-1=x \\ z=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$$

7	**Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(2, 2, 4), B(2, 4, 0) y C(6, 2, 4).**

SOLUCIÓN:

La mediana es la recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana desde A:

Punto medio BC: P(4, 3, 2) $\rightarrow \overrightarrow{AP} = (2, 1, -2) \rightarrow m_A : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}$

Mediana desde B:

Punto medio AC: Q(4, 2, 4) $\rightarrow \overrightarrow{BQ} = (2, -2, 4) \rightarrow m_B : \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{4}$

Mediana desde C:

Punto medio AB: R(2, 3, 2) $\rightarrow \overrightarrow{CR} = (-4, 1, -2) \rightarrow m_c : \frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$