TEMA 5: GEOMETRÍA AFÍN DEL ESPACIO.

Vector libre:

Vector fijo: Un vector fijo de origen A y extremo B, es un segmento caracterizado por:

- Dirección o recta que lo contiene.
- Sentido u orientación de la recta.
- Módulo o longitud del segmento.

Coordenadas de un vector fijo: Llamamos coordenadas de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$, de origen $A(a_1, b_1, c_1)$ y extremo $B(a_2, b_2, c_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$$

Módulo de un vector fijo: $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$

Vector libre: Los vectores con el mismo módulo, dirección y sentido se dicen vectores equipolentes.

Todos los vectores equipolentes a uno dado definen un vector libre. Escribiremos $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ que será un representante, es decir, el vector libre vendrá representado por cualquier vector fijo del conjunto de vectores equipolentes.

Coordenadas de un vector libre: Serán las coordenadas de cualquiera de los vectores libres que podemos tomar como representante: $\vec{v} = (a, b, c)$

Módulo de un vector libre: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Si el módulo de un vector libre es uno, decimos que es un vector **unitario**.

Operaciones con vectores libres:

Suma de vectores libres:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v} = (a, b, c) \\ \vec{v}\,' = (a', b', c') \end{array}\right\} \vec{v} + \vec{v}\,' = (a + a', b + b', c + c')$$

Propiedades:

- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Existencia de elemento neutro: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- Elemento simétrico: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Producto de un número real por un vector:

$$\left.\begin{array}{c} t\in\mathbb{R} \\ \vec{v}=(a,b,c) \end{array}\right\} t\cdot\vec{v}=(ta,tb,tc)$$

Propiedades:

- Distributiva del producto respecto a la suma de vectores: $t\cdot(\vec{v}+\vec{w})=t\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}$
- Distributiva de la suma de números reales por un vector: $(t+s)\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{v}$
- Asociativa mixta: $(t\cdot s)\cdot\vec{v}=t\cdot(s\cdot\vec{v})$
- Elemento neutro: $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Con estas propiedades de la suma y el producto por un número real, se puede decir que los vectores libres de $\mathbb{R}^3$ forman un espacio vectorial.

Dependencia e Independencia Lineal de Vectores. Bases:

Vectores linealmente dependientes:

- Dos vectores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ son linealmente dependientes si verifican una de las siguientes condiciones:

➔ $\exists t,s\in\mathbb{R}\; t\neq 0, s\neq 0 / t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}=\vec{0}$

➔ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (están en la misma recta)

➔ $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=1$

- Tres vectores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ y $\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)$ son linealmente dependientes si se verifica una de las siguientes condiciones:

➔ $\exists t,s,r\in\mathbb{R}/t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}+r\cdot\vec{w}=\vec{0}$ donde *t*, *s*, *r* son no nulos a la vez

➔ $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios

➔ $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}<3$

Vectores linealmente independientes:

- Dos vectores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ son linealmente independientes si verifican una de las siguientes condiciones:

➔ $t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow t=s=0$

➔ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección

➔ $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$

- Tres vectores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ y $\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)$ son linealmente independientes si se verifican una de las siguientes condiciones:

➔ $t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}+r\cdot\vec{w}=\vec{0}\Rightarrow t=s=r=0$ donde *t*, *s*, *r* son no nulos a la vez
➔ $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios
➔ $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=3$

Bases de vectores:

En el espacio de vectores de $\mathbb{R}^3$, tres vectores linealmente independientes forman una **base** del espacio $\mathbb{R}^3$.

Sea $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma: $\vec{v}=a\,\vec{u}_1+b\,\vec{u}_2+c\,\vec{u}_3$.
Los números a, b y c son las **coordenadas** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

Sistemas de referencia:

El sistema de referencia cartesiano en el espacio $\mathbb{R}^3$ es $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ y está formado por:

- Un punto fijo que llamamos origen del sistema.
- Una base de vectores $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ unitarios y perpendiculares entre sí, es decir, **ortonormales**.

Coordenadas de un punto: Todo punto P del espacio $\mathbb{R}^3$ tiene asociada tres coordenadas en el sistema de referencia:

$$P\ (x_0,y_0,z_0)$$

Es equivalente a escribir:

$$\vec{OP}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$$

Coordenadas de un vector: Sean A (x_1,y_1,z_1) y B (x_2,y_2,z_2) las coordenadas de los puntos extremos y origen de un vector $\vec{AB}$. Las coordenadas del vector serían: $\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Coordenadas del punto medio de un segmento: Sea el segmento $\overline{AB}$ de extremos A (x_1,y_1,z_1) y B (x_2,y_2,z_2) , y sea M (x,y,z) el punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Ecuaciones de la recta:

Para dar las ecuaciones de una recta necesitaremos un punto de la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector de dirección $\vec{v}=(a, b, c)$ de la misma.

Para cualquier punto P (x, y, z) de la recta tendremos que:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+t\cdot\vec{v} \quad \text{donde} \quad t\in\mathbb{R}$$

Expresado en coordenadas:

$$\boxed{(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+t\cdot(a, b, c), t\in\mathbb{R}}$$ ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Igualando coordenadas tenemos:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=x_0+t\cdot a \\ y=y_0+t\cdot b \\ z=z_0+t\cdot c \end{array}\right\} t\in\mathbb{R}}$$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

Eliminando el parámetro *t* de las anteriores ecuaciones obtenemos:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$ ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA

Operando dos a dos en as tres razones anteriores obtendríamos la ecuación de la recta como intersección de dos planos:

$$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \end{array}\right\}$$ ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA

Ecuaciones del Plano:

Para determinar las ecuaciones de un plano necesitaremos un punto del plano $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores direccionales del plano $\vec{u}=(a, b, c)$ y $\vec{v}=(a', b', c')$.

Para cualquier punto P (x, y, z) del plano tendremos que:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_0}+t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v} \quad \text{donde} \quad t, s\in\mathbb{R}$$

Expresando en coordenadas:

$$\boxed{(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+t\cdot(a, b, c)+s\cdot(a', b', c'), t, s\in\mathbb{R}}$$ ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Igualando coordenadas tenemos:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x=x_0+t\cdot a+s\cdot a' \\ y=y_0+t\cdot b+s\cdot b' \\ z=z_0+t\cdot c+s\cdot c' \end{array}\right\} t,s\in\mathbb{R}}$$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO

Sabemos que los vectores $\overrightarrow{PP_0}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(a',b',c')$ son coplanarios (linealmente independientes):

$$r\begin{pmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{pmatrix}=2 \quad \text{, es decir:} \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando este determinante tenemos:

$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA DEL PLANO

Posiciones Relativas de Dos Planos:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

- $r(A)=r(A^{¿})=2$ Los planos son SECANTES (se cortan en una recta).
- $r(A)=r(A^{¿})=2$ Los planos son PARALELOS
- $r(A)=r(A^{¿})=1$ Los planos son COINCIDENTES

Posiciones Relativas de Tres Planos:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \\ \pi_3: A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- $r(A)=r(A^{¿})=3$ Los planos son SECANTES (se cortan en un punto)
- $r(A)=2\neq r(A^{¿})=3$ Los planos se cortan dos a dos
- $r(A)=r(A^{¿})=2$ Los planos se cortan en una recta (o dos son coincidentes y el tercero los corta en una recta)
- $r(A)=1\neq r(A^{¿})=2$ Los planos son PARALELOS
- $r(A)=r(A^{¿})=1$ Los planos son COINCIDENTES

Posiciones Relativas de una Recta y un Plano:

$$\left.\begin{matrix} r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases} \\ \pi : A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \end{matrix}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

- $r(A)=r(A^{¿})=3$ El plano y la recta son SECANTES (se cortan en un punto)
- $r(A)=2\neq r(A^{¿})=3$ La recta y el plano son PARALELOS
- $r(A)=r(A^{¿})=2$ La recta está contenida en el plano

Posiciones Relativas de dos Rectas:

$$\left.\begin{matrix} r_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases} \\ r_2:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \\ A_4x+B_4y+C_4z=D_4 \end{cases} \end{matrix}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad A^{¿}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

- $r(A)=3\neq r(A^{¿})=3$ Las rectas se CRUZAN en el espacio
- $r(A)=r(A^{¿})=3$ Las rectas se CORTAN en un punto
- $r(A)=2\neq r(A^{¿})=3$ Las rectas son PARALELAS
- $r(A)=r(A^{¿})=2$ Las rectas son COINCIDENTES